

Ряды Тейлора.

① Ряд Тейлора. Основными имен ряда Тейлора.

Если функция f определена в некоторой окрестности x_0 и имеет в x_0 производные всех порядков, то следующим образом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (*)$$

выполняется ряд Тейлора функции f в x_0

Если $x_0=0$, то ряд $(*)$ называется рядом Маклорена.

Если функция f имеет аналитическое в x_0 , т.е., представима в $U_r(x_0)$ степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < r,$$

то функция f бесконечно дифференцируема в окрестности $U_r(x_0)$, и имеет следующие свойства

ряд Тейлора в x_0 , т.е.,

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=1, 2, \dots$$

Обратное не верно: $\exists$ функция, бесконечно дифференцируемая в окр. x_0 , ряд Тейлора

который, не сходясь к $f(x)$ при $x \neq x_0$.
 (Более строго $f(x) \neq 0$, $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$
 $f(0) = 0$.)

Рассмотрим остаточный член по формуле Тейлора
 для n -го $f(x)$ в окр. т. x_0 : и
 $r_n(x) = f(x) - S_n(x)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$

Существует бесконечно малый член
 Нам нужно о.ч. член в формуле Лейбница:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x).$$

Теорема Если функция n раз дифференцируема и во ее окрестности удовлетворяет в окр. $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ неравенству:
 ($a \geq 1$) $|f^{(n)}(x)| \leq M \cdot a^n, \quad n=0, 1, 2, \dots$

Тогда n -ая $f(x)$ разлагается в л-е по формуле Тейлора в $O(x_0)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Док-во. Применить остаточный член в n -ой формуле и пер-во: $|r_n(x)| \leq \frac{M(a\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$

② Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

1) Экспоненциальная функция:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2) Гиперболические функции:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3) Тригонометрические функции:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Все эти ряды сходятся $\forall x \in \mathbb{R}$. $R = \infty$

4) Степенная функция

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \quad \forall x$$

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

Если $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq k$, $k \in \mathbb{N}$, то $R = 1$.

Вам нужно решить задачу $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

5) дифференцирование функции:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}; \quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Радиус сходимости равен $R = 1$.

Задача 1. Разложить в ряд Маклорена, используя разложение элементарных функций:

a) $f(x) = \sin^3 x$; д) $\frac{1}{(1-x)^2}$; б) $\frac{1}{1+x+x^2}$;

з) $\ln(1+x+x^2+x^4)$; г) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; е) $\sqrt{1+x^2}$

Решение: а) $\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x) =$

$$= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3 - 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$8) \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}, |x| < 1$$

$$6) \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - x \cdot \frac{1}{1-x^3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - x \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, \text{ where } a_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ -1, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$2) \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x)(1+x^2) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \quad |x| < 1$$

$$g) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{\alpha}^n (-x^2)^n, \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

Remember, where $C_{-\frac{1}{2}}^n = \frac{(-1/2)(-1/2-1) \dots (-1/2-(n-1))}{n!} =$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

- 6 -

$$e) \sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1/2}^n (x^2)^n$$

$$C_{1/2}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right) \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \quad n \geq 2, \quad C_{1/2}^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-3)!!}{(2n)!!}$$

Задача 2. Разложить в ряд Маклорена

$$f(x) = \frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$$

Решение: $\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$$3x+8 = A(x^2+4) + (Bx+C)(2x-3)$$

Приравняем коэффициенты при равных степенях, получим систему 3 уравнений и найдем: $A=2, B=-1, C=0$

$$f(x) = \frac{2}{2x-3} - \frac{x}{x^2+4} = -\frac{2}{3(1-\frac{2x}{3})} - \frac{x}{4(1+\frac{x^2}{4})} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \cdot x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2} \right) x^{2n+1}.$$

Задача 3. Разложить в ряд Тейлора в определенном центре $x_0 = 2$ функцию $f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$.

Решение: $4 + 3x - x^2 = (4 - x)(x + 1)$.

Положим $x - 2 = t$.

$$f(x) = g(t) = \ln(2 - t)(3 + t) = \ln 6 + \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right)$$

$$g(t) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot t^n}{3^n \cdot n}$$

Поэтому:

$$f(x) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left((-1)^{n+1} \cdot 3^{-n} - 2^{-n} \right) (x - 2)^n.$$

Задача 4. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Занедем ряд Маклорена

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n$$

Доказать, что коэффициенты B_n находятся из рекуррентных уравнений:

$$C_{n+1}^0 \cdot B_0 + C_{n+1}^1 B_1 + \dots + C_{n+1}^{n-1} \cdot B_{n-1} + C_{n+1}^n B_n = 0$$

для $n \geq 2$;

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}$$

т.е. C_{n+1}^k - биномиальные коэф. ($C_{n+1}^0 = 1$)

$$x = (e^x - 1) \cdot f(x)$$

Решение:

$$x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right)$$

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right)$$

Так как $B_0 = f(0) = 1$ и возмущения
 для x^n ($n \geq 1$) в левой части равны 0,
 выпишем по порядку коэффициенты при x^n
 слева:

$$\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)!} = 0$$

Напомним, что $C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

Получим: $(n+1)! \sum_{k=0}^n B_k \cdot C_{n+1}^k = 0$, т.е.

$$C_{n+1}^0 \cdot B_0 + C_{n+1}^1 B_1 + \dots + C_{n+1}^{n-1} B_{n-1} + C_{n+1}^n B_n = 0.$$

Задача 5. Доказать равенство:

$$\ln(m+1) = \ln m + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)^{2n+1}}$$

Значения $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью 10^{-5}

Решение. Воспользуемся разложением:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

Положим теперь $x = \frac{1}{2m+1}$

$$\ln \frac{1 + \frac{1}{2m+1}}{1 - \frac{1}{2m+1}} = \ln \frac{m+1}{m} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)^{2n+1}}$$

Обозначим $R_p(x) = 2 \sum_{n=p}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Тогда при $x > 0$ $|R_p(x)| \leq \frac{2x^{2p+1}}{(2p+1)(1-x^2)}$

Отсюда, при $x = \frac{1}{3}$ ($m=1$) имеем $R_p < 10^{-5}$

при всех $p \geq 5$, а при $x = \frac{1}{5}$ ($m=2$)

$R_p \leq 10^{-5}$ при всех $p \geq 3$. Поэтому

$$\ln 2 \approx 2 \sum_{n=0}^4 \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} \approx 0,69315$$

$$\ln 3 = 2 \sum_{n=0}^2 \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} \approx 1,09861$$