1.ка

Мат. Анализ. Семинар № 11

Разбор контр. работы № 2

Задача 1. Найти предельную функцию

I) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(x^{1/n} - 1\right)$, $x \in (0,\infty)$

$$\frac{x^{1/n} - x^0}{1/n} = \frac{g(\frac{1}{n}) - g(0)}{1/n} = g'(t)\Big|_{t=0}$$

$g(t) = x^t$, $g'(t) = \ln x \cdot x^t$, $g'(0) = \ln x$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \ln x$, $x \in (0,\infty)$

II) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x^2 + 1/n} - x\right) \underset{x\in(0,\infty)}{=}$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{x^2 + 1/n - x^2}{\sqrt{x^2+1/n} + x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + x} = \frac{1}{2x}$$

Задача 2. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ф-ии $f_n(x)$, для мн-вах E_1 и E_2

I) $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, $E_1 = [0,a]$, $E_2 = [0,\infty)$

II) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+2n+x}$, $E_1 = [0,1]$, $E_2 = [\cancel{1},\infty)$

Решение: I) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, x

$x\in E_1=[0,a]$ $|f_n(x)| \le \frac{a}{n}$ $\Rightarrow$ равн. сх. на E_1

$x\in E_2=[0,\infty)$ $x_n=n$, $f_n(x_n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 > 0$

нет равн. сх. на E_2

II) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+2n+x} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{n}+2+\frac{x}{n}} = \frac{x^2}{2}$

а) $x\in E_1=[0,1]$. $|f_n(x)| \le \frac{1}{1+2n} \to 0$ $(n\to\infty)$

есть равн. сх. на E_1

б) $x\in[1,\infty)$, $x_n=n$ $f_n(x_n) = \frac{n^3}{1+3n} \to \infty$

нет равн. сх. на E_2

Задача 3. Найти область сходимости и область абсолютной сходимости ряда

I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

Решение: I) Замена $q=\frac{1-x}{1+x}$.

Ряд $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} q^n$ – сходится $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |q|<1 \\ q=1 \end{array}\right.$

$|q|<1 \Leftrightarrow x>0$ $\left(\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow x>0 \right)$

$q=1 \Leftrightarrow x=0$

Ответ: Обл. сходимости $x \in [0, \infty)$

Обл. абс. сходимости $x \in (0, \infty)$

Обл. равномерной сход: $x \in [0, \infty)$ Абель

II) 1) Если $|x| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \le x^n \Rightarrow$ Сходится абсолютно

2) Если $|x| > 1$, Замена $x = \frac{1}{t}$

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{t^n}{1+t^{2n}}, \quad |t| < 1 \Rightarrow \text{Сходится абсолютно}$$

3) $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ Расходится, $u_n \not\to 0$.

Ответ: Обл. сходимости $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Обл. абс сходимости $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Область равномерн сходимости $\mathbb{R} \setminus U_\delta\{1, -1\}$, $\delta > 0$.

На $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ нет равномерн сходимости

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad |u_n(x_n)| = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} > \frac{e}{2+e^2} > 0$$

Задача 4. Доказать равномерную сходимость

I) $\sum \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n\sqrt[3]{n}}$, $x \in \mathbb{R}$,

II) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}$, $x \in [1, \infty)$

Использовать признак Вейерштрасса:

I) $|u_n(x)| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^{4/3}}$ - сходится

II) $|u_n(x)| = e^{-\sqrt{nx}} \le e^{-\sqrt{n}}$, $x \ge 1$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ - сходится, т.к. $e^{-\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$

$\sqrt{n} = y$ $\quad e^{-y} < \frac{1}{y^4}$, $\boxed{e^{y} > y^{4},}$ $y >> 1$.

<u>Задача 5.</u> Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на E

I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$, $1 \le x \le \infty$.

II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$, $0 \le x \le \infty$.

<u>Решение:</u> <u>Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится,</u>

последов. $a_n = \frac{x^n}{x^n+1} = 1 - \frac{1}{x^n+1}$ - ограничена и монотонна (возрастает)

Поэтому по равномерному признаку Абеля, ряд <u>равномерно сходится</u>

II) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ - огранич., $\frac{1}{x+\sqrt{n}} \downarrow_n \rightrightarrows 0$

по равномерному Дирихле <u>сходится равн</u>

Задача 6. Найти радиус сходимости и исследовать сходимость на концах.

I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n\cdot(x+2)^n$; II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^n$

Решение

I) $R^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\frac{2}{3}$

$R=\frac{3}{2}$, $x_0=-2$, $E=\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$

На концах: $x_1=-\frac{7}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ расходится

$x_2=-\frac{1}{2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n$ - расходится

II) $R=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$

$R=1$, $E=(-1,1)$.

На концах: $x=-1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ - расходится

$x=1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ - сход. Лейбниц.

Задача 7. Найти сумму ряда, $|x|<1$:

I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^n$; II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)\cdot x^n$, Применим почленное дифференцирование

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1.$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (\text{I}).$$

Аналогично: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Задача 8. Разложить в ряд Маклорена

I) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, II) $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$

Решение:

I) $$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\ldots+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}\ldots\right)=$$

$$= x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=-\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=$$

$$=\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)=$$

$$=\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\left(\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}-\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\left(\frac{1}{x_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n-\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{x_1-x_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{x_2}\right)^{n+1}\right)\cdot x^n$$

Найдём корни x_1 и x_2 $\quad x^2+x-1=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt5}{2},\quad x_1-x_2=\sqrt5.$$

$$x_1=\frac{\sqrt5-1}{2}$$

$$x_2=-\frac{\sqrt5+1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{\sqrt5-1}\right)^{n+1}-\left(\frac{-2}{\sqrt5+1}\right)^{n+1}\right)\cdot x^n$$

Обозначим $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n\cdot x^n$.

Покажем, что φ_n – натуральные числа, φ_n – последовательность Фибоначчи

Заметим, что $f(x)\cdot(1-x-x^2)=1$, т.е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\cdot x^n\right)(1-x-x^2)=$$

$$=(\varphi_0+\varphi_1\cdot x+\varphi_2\cdot x^2+\ldots+\varphi_n x^n+\ldots)(1-x-x^2)=$$

$$=\varphi_0+(\varphi_1-\varphi_0)x+(\varphi_2-\varphi_1-\varphi_0)x^2+\ldots+$$

$$+(\varphi_n-\varphi_{n-1}-\varphi_{n-2})x^n+\ldots\equiv 1$$

т.е. $\varphi_0=1$, $\varphi_1-\varphi_0=0 \Rightarrow \varphi_1=1$

$\varphi_2-\varphi_1-\varphi_0=0 \Rightarrow \varphi_2=\varphi_1+\varphi_0=2$

$\varphi_3=\varphi_2+\varphi_1=3$, $\varphi_4=\varphi_3+\varphi_2=5$ и т.д.

$\varphi_n=\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}$ – числа Фибоначчи.

<u>Вывод</u>: $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$ – производящая функция последовательности Фибоначчи.

<u>Задача 9.</u> Решить дифференциальные уравнения: $y''+\lambda^2 y=0$

I) $y(0)=0$, $y'(0)=1$

II) $y(0)=1$, $y'(0)=1$

(Уравнение гармонических колебаний)

Решение: Ищем в виде ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n.$$ Предполагаем, сходится

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2}$$

Подставляем в уравнение:

$$y''(x) + \lambda^2 \cdot y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^2 a_n \cdot x^n =$$

$$= a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 x + a_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2 + \ldots +$$
$$+ \lambda^2 \cdot a_0 + \lambda^2 \cdot a_1 \cdot x + \lambda^2 \cdot a_2 \cdot x^2 + \lambda^2 a_3 \cdot x^3 + \lambda^2 a_4 \cdot x^4 + \ldots$$

Приравниваем нулю

$$2 a_2 + \lambda^2 \cdot a_0 = 0$$

$$3 \cdot 2 a_3 + \lambda^2 \cdot a_1 = 0$$

$$4 \cdot 3 \cdot a_4 + \lambda^2 \cdot a_2 = 0$$

$$n(n-1) \cdot a_n + \lambda^2 \cdot a_{n-2} = 0$$

I) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 0$, $a_1 = 1$

подставляем: $a_2 = 0$, $a_3 = -\lambda^2/(3 \cdot 2)$

$a_4 = a_6 = \ldots = 0$, $a_5 = \lambda^4/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$

В итоге: $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n \cdot \lambda^{2n}}{(2n+1)!}$

Значит:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \lambda^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (\lambda x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$$

Ответ: $y(x) = \dfrac{\sin \lambda x}{\lambda}$

Проверка: $y(0) = 0$, $y'(0) = \cos \lambda x \big|_{x=0} = 1$

$y' = \cos \lambda x$, $y'' = -\lambda \sin \lambda x$

$$y'' + \lambda^2 y = (-\lambda \sin \lambda x) + \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda x}{\lambda} = 0.$$

II) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Подставляем:

$a_2 = -\dfrac{\lambda^2}{2}$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0, \dots$

$a_4 = \dfrac{+\lambda^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$, $a_6 = \dfrac{-\lambda^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

В итоге $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n \lambda^{2n}}{(2n)!}$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \lambda^{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\lambda x)^{2n} =$$

$= \cos \lambda x$

Ответ: $y(x) = \cos \lambda x$

проверим: $y'(x) = -\lambda \sin \lambda x$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

$y''(x) = -\lambda^2 \cdot \cos \lambda x$

$y'' + \lambda^2 y = -\lambda^2 \cdot \cos \lambda x + \lambda^2 \cos \lambda x = 0$