1к

Мат. Анализ. Семинар № 12

Неопределенный интеграл

① Первообразная и неопределенный интеграл

Задана $f(x)$, $x \in E$, E – промежуток $\mathbb{R}$.

Определение. Функция $F(x)$, $x \in E$, называется первообразной функции $f(x)$ на E, если $F(x)$ непрерывна на E, дифференцируема $\forall x \in E$, причем

$$F'(x) = f(x), \quad x \in E.$$

Операция, обратная дифференцированию: по производной восстановить функцию. Поэтому $F(x)$ называют еще антипроизводной.

Она не единственная. Если $F(x)$ – первообразная $f(x)$ на E, то $\forall C \in \mathbb{R}$ $F(x) + C$ – тоже первообр.

Теорема. Если $f(x)$ – непрерывна на E, то существует первообразная $F(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная $f(x)$, то мн-во $\{F(x) + C\}$ называется неопределенным интегралом.

Обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad x \in E.$$

(без фигурных скобок)

Терминология: $\int$ – интеграл, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

② Свойства неопределенного интеграла.

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

2) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$, $\int df(x) = f(x) + C$

3) Линейность неопределенного интеграла:

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$$

4) Формула интегрирования по частям:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

5) Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Задана сложная функция $f(\varphi(x))$ на некотором промежутке, функция $t = \varphi(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема на нем. Если интеграл $\int f(t)\,dt$ существует, то существует также $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$, причем

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\,\Big|_{t=\varphi(x)} \qquad (*)$$

(формула интегрирования подстановкой)

Если, для функции $t = \varphi(x)$ существует обратная функция $x = \varphi^{-1}(t)$, то $(*)$ можно переписать так:

$$\int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx\,\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}$$

Или если использовать исходную переменную x:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \quad (**)$$

(Формула интегрирования заменой перем.)
Обычно, знак $|_{x=\varphi^{-1}(t)}$ опускают.

③ Таблица неопределенных интегралов

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$; 2) $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a>0,\ a\neq 1$; $\int e^x dx = e^x + C$;

4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

8) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$; 9) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$; 11) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C$;

12) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

13) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\quad a\neq 0$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ |x|<a$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C,\quad a\neq 0$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ |x|>|a|$

Примеры нахождения неопределенных инт.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

3) $\int (x - 2e^x)\,dx = \int x\,dx - 2\int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C$ $\quad x \in \mathbb{R}$

4) $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} = \int dx - 4\int x^{-1/6} dx + 4\int x^{-1/3} dx =$

$= x - \frac{24}{5} \cdot x^{5/6} + 6 x^{2/3} + C, \quad x > 0$

5) $\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} =$

$= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C \quad, x \neq 0$

6) $\int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$

$= \ln(x + \sqrt{x^2+3}) - 3\ln|x + \sqrt{x^2-3}| + C, \quad |x| > \sqrt{3}$

7) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx =$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C; \quad x \in \mathbb{R}$

8) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C$ $\quad x \in \mathbb{R}$

9) $\int 3^x \cdot 5^{2x}\,dx = \int 75^x\,dx = \frac{75^x}{\ln 75} + C, \quad x \in \mathbb{R}$

Задача 1. Найти интегралы

1) $\int (3x-5)^{10}dx$, 2) $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}$, 3) $\int \operatorname{tg} x\, dx$;

4) $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$, $|x|<\frac{\pi}{2}$; 5) $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^{16}}}$, 6) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx$.

Решение. Используем формулу подстановки

1) $\int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}(3x-5)'dx$

$t=\varphi(x)=3x-5$, $f(t)=t^{10}$

$\int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C\Big|_{t=3x-5} = \frac{1}{33}(3x-5)^{11}+C$

2) $\int x^2\cdot\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{5x^3+1}\,(5x^3+1)'dx =$

$= \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{5x^3+1}\,d(5x^3+1) = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{t}\,dt =$

$\boxed{t=\varphi(x)=5x^3+1,\ f(t)=\sqrt[5]{t}} = \frac{1}{18}t^{\frac{6}{5}}+C = \frac{1}{18}(5x^3+1)\sqrt[5]{5x^3+1}+C$

3) $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} =$

$\boxed{t=\cos x,\ f(t)=\frac{1}{t}} = -\ln|t|+C = -\ln|\cos x|+C$

4) $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin^2 x} = \int \frac{1}{3+2\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= \int \frac{d\operatorname{tg} x}{3+2\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dt}{3+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{6}}\right)+C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\operatorname{tg} x\right)+C$

$\boxed{t=\operatorname{tg} x}$

5) $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^{16}}} = \frac{1}{8}\int \frac{dx^8}{\sqrt{1-x^{16}}} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$\boxed{t = x^8}$ $= \frac{1}{8}\arcsin t + C = \frac{1}{8}\arcsin x^8 + C$

6) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}}dx =$

$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right| + C =$

$\boxed{t = x - \frac{1}{x}}$ $= \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}\right| + C$

Задача 2. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

$(x \geq 0)$

Решение. Воспользуемся заменой перем.

1) $x = t^2 = \varphi(t)$, $f(x) = 2+\sqrt{x}$, $x \geq 0$

$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{dt^2}{2+t} = \int \frac{2t\,dt}{2+t} = 2\int \frac{2+t-2}{2+t}dt$

$= 2t - 4\ln|2+t| + C = 2\sqrt{x} - 4\ln|2+\sqrt{x}| + C$.

2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Удобно замену: $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^2\sqrt{1+(1/t)^2}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= -\int d\sqrt{t^2+1} = -\sqrt{t^2+1} + C = -\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + C$$

---

3) Замена: $e^x + 1 = t^2$, $t > 0$

$$e^x dx = 2t\,dt \Rightarrow dx = \frac{2t\,dt}{e^x} = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}-1}\right) + C$$

Задача 3. Найти интегралы

1) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$; 2) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx$

Решение: 1) Представим функцию в виде линейной комбинации двух таких дробей, так, чтобы числителем 1 дроби была производная знаменателя (x^2-x+1), а числитель второй дроби — единица: $(x^2-x+1)' = 2x-1$

$$\frac{3x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}$$

Интегралы каждой дроби легко найти:

$$\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=\frac{3}{2}\ln|x^2-x+1|+C_1$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_2$$

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

---

2) Аналогичная идея: представить $f(x)$ в виде комбинации двух дробей так, чтобы числитель первой дроби был производной квадратичного трехчлена, стоящего в знаменателе, $(-x^2+6x-8)'=-2x+6$:

$$\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=-\frac{3}{2}\frac{(-2x+6)}{\sqrt{-x^2+6x-8}}+13\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$$

Тогда:

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=-\frac{3}{2}\int\frac{d(-x^2+6x-8)}{\sqrt{-x^2+6x-8}}+13\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=$$

$$=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C$$

Задача 4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin x}$

Решение: 1-й способ

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x-1}=\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1}{2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 1}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

2-й способ

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \int\frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Задача 4. Найти интегралы

1) $\int \ln x\, dx$; 2) $\int x\sin x\, dx$

Решение: Используем интегрирование по частям: $\int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du$

1) $u = \ln x; dv = dx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$

$$\int \ln x\, dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$$

2) $u = x, dv = \sin x\, dx; du = dx, v = -\cos x$

$$\int x\sin x\, dx = -x\cdot\cos x + \int\cos x\, dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Задача 5: Найти интегралы

1) $\int x^2 e^x dx$; 2) $\int \arccos^2 x\, dx$

Решение: 1) $u = x^2$, $dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx \quad v = e^x$

$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d\, e^x = x^2 \cdot e^x - \int e^x dx^2 =$

$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x\, d\, e^x =$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

---

2) $u = \arccos^2 x$, $dv = dx$

$du = -\dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$

$\int \arccos^2 x\, dx = x \cdot \arccos^2 x + 2\int \dfrac{x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Еще раз по частям: $u = \arccos x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

т.е. $du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \int dv = \int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\int d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + C_1$

Тогда: Пусть $v = -\sqrt{1-x^2}$

$\int \dfrac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int dx =$

$$= -\sqrt{1-x^2}\cdot \arccos x - x + C$$

Следовательно:

$$\int \arccos^2 x \, dx = x\cdot \arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\cdot \arccos x - 2x + C$$

Задача 6. Найти интеграл $J = \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx, \quad a \neq 0$

Решение: $u = \sqrt{a^2-x^2}, \quad dv = dx$

$$du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v = x$$

$$J = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$ Заметим

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-(x^2-a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$J = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - J$$

Решаем это уравнение:

$$J = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

Задача 7. Получить для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

рекуррентную формулу: $$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right)$$

Решение: интегрируем по частям:

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx$$

$$du = \frac{-2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot J_n - 2n\cdot a^2\cdot J_{n+1}$$

Отсюда: $J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\,J_n\right)$

При этом $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Следовательно, можно найти J_2, J_3 и т.д.

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C$$