1К ① Мат. Анализ. Семинар №13

Задача 1. Получить для $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \in \mathbb{N}$ рекуррентную формулу:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right).$$

Решение: интегрируем по частям

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du \quad (*)$$

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx$$

$$du = \frac{-2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

подставляем в (*)

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$$

Откуда: $\boxed{J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\cdot J_n\right).}$

При $n=1$ $\quad J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Следовательно, получаем $J_2, J_3, \ldots$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C$$

② Интегрирование рациональных функций

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx. \quad P(x),\ Q(x) - \text{многочлены}$$

Рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad p^2-4q<0.$$

A) Интегрирование элементарных дробей

1) $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

2) $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1.$$

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C$$

4) $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left((x+p/2)^2+q-p^2/4\right)^n},\ n>1$$

Последний интеграл подстановкой $t=x+\frac{p}{2}$ приводится к интегралу J_n, рассмотренному в задаче 1.

<u>Теорема</u>. Неопределенный интеграл от любой рациональной функции на всяком промежутке, принадлежащем её области определения, является элементарной функцией, представимой в виде алгебраической суммы композиций рац. функций, логарифмов и арктангенсов.

<u>Задача 2</u> Найти $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

<u>Решение</u>: У знаменателя простые корни $\{-1,-2,3\}$

Разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{x-3}$$

Следовательно:

$$x = A_1(x+2)(x-3)+A_2(x+1)(x-3)+A_3(x+1)(x+2)$$

Подставим 3 аргумента: $x=-1,\ x=-2,\ x=3$

Получим: $-1=-4A_1,\ -2=5A_2,\ 3=20A_3$

т.е. $A_1=1/4,\ A_2=-2/5,\ A_3=3/20$

Следовательно

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac14\ln|x+1|-\frac25\ln|x+2|+\frac{3}{20}\ln|x-3|+C.$$

Задача 3. Найти $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$

$x_1=1$ - корень знаменателя $x_2=1$, $x_3=-2$

$(x^3-3x+2)(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+2}$$

$$x = A_1(x+2)+A_2(x-1)(x+2)+A_3(x-1)^2$$

подставляем: $x=1$, $x=-2$, $x=0$.

т.е. $1=3A_1$, $-2=9A_2$, $0=2A_1-2A_2+A_3$

$A_1=1/3$, $A_2=-2/9$, $A_3=2A_2-2A_1=-\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{10}{9}$

Ответ:

$$\int\frac{x\,dx}{x^3-3x+2}=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{10}{9}\ln|x+2|$$

Задача 4. Найти $\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}$

Неправильная рациональная дробь. Разделить с остатком: $P(x)=2x^4+5x^2-2$ на $Q(x)=2x^3-x-1$

частное: $T(x)=x$, остаток $R(x)=6x^2+x-2$

$$2x^4+5x^2-2=x(2x^3-x-1)+6x^2+x-2$$

$$P(x)=Q(x)\cdot T(x)+R(x),\ \boxed{\deg R<\deg Q}$$

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}$$

$Q(x)$ имеет корень $x=1$. Разделим Q на $(x-1)$:

$Q(x)=2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)$.

не имеет действ. корней

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}$$

$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1)+(Mx+N)(x-1)$$

Положим $x=1$: $5=5A \Rightarrow A=1$

приравняем коэффициенты при x^2 и 1:

$$6=2A+M, \quad -2=A-N \Rightarrow M=4, N=3$$

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}.$$

Следовательно:

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{2x^2+2x+1} = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \operatorname{arctg}(2x+1) + C$$

$2x^2+2x+1 = 2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$

Задача 5. Найти $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$

Решение: Разложение имеет вид:

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+3)$$

приравняем коэфф. при одинак. степенях:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 2 = A+C \\ x^2 & 1 = -A+B+D \\ x & 5 = A-B+3C \\ 1 & 1 = B+3D \end{array} \quad \left.\right\} \quad \begin{array}{l} A=0 \\ B=1 \\ C=2 \\ D=0 \end{array}$$

$2x = 2x-1+1$

Следовательно:

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+3} + \int \frac{2x\,dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Задача 6. Найти $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$

Решение: Разложение на элем. дроби:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$$4x^2-8x = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Ex+F)(x-1)^2 + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) \quad (*)$$

Приравнивая коэффициенты, можно получить систему 6 уравнений с 6 неизвестными.

Поступим иначе: Положим в $(*)$ $x=1$

Найдем $B=-1$. Затем положим $x=i$

$$-4-8i = (Ei+F)(i-1)^2 = 2E-2iF$$

Приравнивая веществ. и мнимые части:

$$-4 = 2E, \quad -8 = -2F \Rightarrow E=-2,\ F=4$$

Теперь продифференцируем $(*)$ по x, и будем вычеркивать те слагаемые, которые не обращаются в ноль при $x=1$:

$$8x-8 = A(x^2+1)^2 + 2B(x^2+1)2x + \ldots$$

Тогда при $x=1$: $0=4A+8B \Rightarrow A=2$

Еще раз продифференцируем (*), но будем выписывать те члены, которые не обращаются в ноль при $x=i$

$$8x-8=(Cx+D)(x-1)^2 2x+E(x-1)^2+(Ex+F)2(x-1)+\dots$$

Подставим $x=i$ и найдем C и D:

$$8i-8=(Ci+D)(i-1)^2 2i-2(i-1)^2+(-2i+4)2(i-1)$$

$$C=-2,\quad D=-1$$

Следовательно:

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx-$$

$$-\int\frac{2x-4}{(x^2+1)^2}dx=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+$$

$$+\frac{1}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Последний интеграл находим из рекуррентной формулы задачи 1: $(a=1)$

$$J_2=\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right)+C$$

Ответ:

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x-1}+\frac{1+2x}{x^2+1}+C$$

Задача 7. Найти $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение:

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$1=(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

приравниваем коэффиц:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+C \\ x^2 & 0=-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D \\ x & 0=A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D \\ 1 & 1=B+D \end{array}$$

Тогда: $A=-C \Rightarrow B=D \Rightarrow B=D=1/2$

$\Rightarrow A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (2-е уравнение):

Следовательно:

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1).$$

Задача 8. При каком условии интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$ представляет собой рациональную функцию?

Решение: Разложение

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{F}{x-1}$$

Не должно содержать первых степеней x и $(x-1)$

т.е. $\boxed{D=0,\ F=0}$

$$ax^2+bx+c = A(x^2-2x+1) + B(x^3-2x^2+x) + Ex^3$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = B+E \\ x^2 & a = A-2B \\ x & b = -2A+B \\ 1 & c = A. \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a = c-2B \\ b = -2c+B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a-c = -2B \\ b+2c = B \end{array}$$

т.е. $a-c = -2B = -2(b+2c)$

$$a-c = -2(b+2c) \Leftrightarrow a-c = -2b-4c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+2b+3c=0$$

Ответ: $\boxed{a+2b+3c=0}$

③ Метод Остроградского.

Пусть рац. функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ является правильной дробью (т.е. $\deg P(x) < \deg Q(x)$), причем знаменатель $Q(x)$ имеет кратные корни (вещественные или комплексные) тогда справедлива формула Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

где $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, причем $Q_1(x)$ имеет те же корни, что и $Q(x)$, но все они простые.

Многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов.

Первое слагаемое $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ есть функция рациональная, а второе $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ – трансцендентная функция: она есть сумма слагаемых вида $a \cdot \operatorname{arctg}(\alpha x + \beta) + b \cdot \ln(\gamma x + \delta) + C$

Если корни $Q(x)$ известны, то $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ легко находятся. Если нет, то можно найти $Q_1(x)$:

$$Q_1(x) = \text{НОД}\left(Q(x), Q'(x)\right).$$

Достоинство метода: сокращается число неопределенных коэффициентов. Чисто алгебраический метод.

Задача 9. Найти $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$

Решение:

Корни комплексные. $Q_1(x) = Q_2(x) = x^2+2x+2$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx =$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,dx$$

Для нахождения A, B, C, D следует продифференцировать это равенство:

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{A(x^2+2x+2)-(Ax+B)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$x^2 = Ax^2+2Ax+2A-2Ax^2-2Ax-2Bx-2B+$$
$$+(Cx+D)(x^2+2x+2)$$

$$x^2 = -Ax^2-2Bx+2A-2B+Cx^3+2Cx^2+2Cx+Dx^2+2Dx+2D$$

$$x^2 = Cx^3+(-A+2C+D)x^2+(-2B+2C+2D)x+(2A-2B-2D)$$

$$\begin{cases} C=0 \\ -A+2C+D=1 \\ -2B+2C+2D=0 \\ 2A-2B+2D=0 \end{cases} \quad \begin{cases} C=0 \\ -A+D=1 \\ B=D \\ 2A=0 \end{cases} \quad \begin{cases} C=0 \\ D=1 \\ B=1 \\ A=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C$$