1к

Мат. Анализ. Семинар № 14

Интегрирование иррациональных функций

Метод рационализации подынтегральной функции: найти подстановку, которая сведет иррац. функцию к рациональной. Рассмотрим ряд примеров таких подстановок.

Через $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обозначается рациональная функция по каждому аргументу x_k.

Например:

$$\frac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}} = R(\underset{x_1}{x}, \underset{x_2}{\sqrt{x}}, \underset{x_3}{\sqrt{1+x^3}})$$

① **Интегралы вида**

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k}\right) dx \quad (*)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{Q}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$

подстановкой $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m$, где m — общий знаменатель рац. чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$ приводятся к рац. функции.

Задача 1. Найти $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$

Решение: $x_1 = x$, $x_2 = x^{1/3}$, $x_3 = x^{1/6}$

В данном случае: $n=3$, $p_1=1$; $p_2=1/3$, $p_3=1/6$

$a=d=1$, $b=c=0$. Общий знаменатель $m=6$. Подстановка $x=t^6$

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = 6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}t^5dt = 6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int t^3 dt + 6\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}t^4 + 6\,\mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x} + C$$

Задача 2. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$

Решение: Преобразуем: [illegible]

$$= \int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\frac{dx}{(2-x)^2}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/3}.$$

В этом случае: $n=1$, $p_1 = 1/3$, $a=-1$, $b=1$, $c=1$, $d=2$

Подстановка: $\frac{2-x}{2+x} = t^3$ Тогда

$$x = 2\,\frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = -12\,\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3}$$

Следовательно:

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\frac{dx}{(2-x)^2} = -12\int\frac{(t^3+1)^2t^3dt}{16t^6(t^3+1)^2} = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3} =$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{1}{t^2} + C = \frac{3}{8}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2/3} + C.$$

Задача 3. $I=\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\,dx$.

Решение: $I=\int \sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}\,dx \qquad 0<x<a.$

Подстановка: $\frac{x}{a-x}=t^4, \quad x=a\cdot\frac{t^4}{t^4+1}$

$dx=\frac{4t^3a}{(t^4+1)^2}\,dt$

$$I=4a\int\frac{t\cdot t^3\,dt}{(t^4+1)^2}=$$

интегрируем по частям

$$=a\cdot\int t\cdot d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right)=$$

$$=a\cdot\frac{t^5}{1+t^4}-a\int\frac{t^4}{1+t^4}\,dt=\frac{at^5}{1+t^4}-at+a\int\frac{dt}{1+t^4}.$$

$$\int\frac{dt}{1+t^4}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t^2)+(1-t^2)}{1+t^4}=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt+\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt+\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

Ответ:

$$I=\frac{at}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+C$$

② Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0$$

сводятся к рац. функциям подстановками Эйлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t, \quad a>0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \quad c>0$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)t$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_2)t$$

где x_1 и x_2 — корни ax^2+bx+c.

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким вычислениям. Более простой путь: привести к виду:

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{a^2x+bx+c}} + R_2(x), \quad R_1(x) \text{ и } R_2(x) \text{ — рац. ф.}$$

Если представить $R_1(x)$ в виде суммы многочленов и элементарных дробей, приходим:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \ (1), \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} \ ; \ (2)$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad p^2-4q<0 \ (3)$$

При вычислении интеграла (1), удобно

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (4)$$

где $Q(x)$ — многочлен, степени не выше $n-1$, λ — параметр. Продифференцировать (4), умножить на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и найти $Q(x)$ и λ методом неопределенных коэффициентов.

Интеграл справа в (4) — табличный.

Интеграл (2) подстановкой $t = \frac{1}{x-\alpha}$ приводится к интегралу (1).

Интеграл (3), если $ax^2+bx+c \approx x^2+px+q$ представляется линейной комбинацией

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}}.$$

В первом подстановка: $u = x^2+px+q$

Во втором подстановка Абеля:

$$t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$$

сводит к интегралу от многочлена.

В общем случае, если $p \neq b/a$, подстановка

$$x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1},$$

где α и β подбирают так, чтобы в трехчленах x^2+px+q и ax^2+bx+c исчезли члены, ... t в первой степени.

Тогда сводится к интегралу

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{st^2+r}}\ ; \text{ где}$$

$P(t)$ – многочлен степени $2m-1$, $\lambda > 0$

(Если $p = b/a$, то линейная замена $x = t - \frac{p}{2}$)

Все сводится к интегралам

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}\ , \quad \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}$$

Первый подстановка $u^2 = st^2 + r$,

Второй подстановка Абеля: $v = \left(\sqrt{st^2+r}\right)' = \dfrac{st}{\sqrt{st^2+r}}$

Бывают удобны тригонометрические и гиперболические подстановки. Привести к виду

$$\int R(t, \sqrt{p^2-t^2})\,dt;\ \int R(t, \sqrt{t^2-p^2})\,dt;\ \int R(t, \sqrt{t^2+p^2})\,dt$$

к первому: $t = p\sin u$, $t = p\cos u$, $t = p \cdot \operatorname{th} u$

ко второму: $t = \dfrac{p}{\cos u}$; $t = p \operatorname{ch} u$

к третьему: $t = p \cdot \operatorname{tg} u$; $t = p \cdot \operatorname{sh} u$.

Задача 4. Найти $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

Решение: применим подстановку Эйлера

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx+1 \Rightarrow 1+x+x^2 = t^2x^2+2tx+1$$

$$1+x = t^2x+2t \Rightarrow x = \frac{2t-1}{1-t^2},\ dx = 2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

Кроме того:

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2},\quad t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{-2t\,dt}{1-t^2} = \ln|1-t^2| + C =$$

$$= \ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C$$

Задача 5. Найти $\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}dx$

Решение: Используем формулу (4):

$$\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{4x^2+4x+2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}$$

Для нахождения A, B, C и λ продифференцируем:

$$\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}} = (2Ax+B)\sqrt{4x^2+4x+2} + (Ax^2+Bx+C)\frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{4x^2+4x+2}}.$$

Умножим на $\sqrt{4x^2+4x+2}$

$$12x^3+16x^2+9x+2 = (2Ax+B)(4x^2+4x+2) + (Ax^2+Bx+C)(4x+2) + \lambda$$

Приравниваем коэффициенты при x^k, $k=3,2,1,0$

$12A=12$, $10A+8B=16$, $4A+6B+4C=9$, $2B+2C+\lambda=2$

$A=1$, $B=\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{8}$, $\lambda=\frac{1}{4}$. Следовательно

$$\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx=\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)\sqrt{4x^2+4x+2}+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}} =$$

Подстановка $t=2x+1$ $\qquad 4x^2+4x+2=(2x+1)^2+1$

$$= \left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)\sqrt{4x^2+4x+2}+\frac{1}{8}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+1}\right)+C$$

Задача 6. Найти $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

Решение: Подстановка: $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$

$$x^2+2=\frac{(\alpha t+\beta)^2+2(t+1)^2}{(t+1)^2}=\frac{(\alpha^2+2)t^2+\overbrace{(2\alpha\beta+4)}^{=0}t+\beta^2+2}{(t+1)^2}$$

$$2x^2-2x+5=\frac{2(\alpha t+\beta)^2-2(\alpha t+\beta)(t+1)+5(t+1)^2}{(t+1)^2}=$$

$$=\frac{(2\alpha^2-2\alpha+5)t^2+\overbrace{(4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10)}^{=0}t+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2}$$

Условие: $\begin{cases}2\alpha\beta+4=0\\ 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0\end{cases}$ Два решения $(2,-1)$, $(-1,2)$

(симметрия)

Возьмем, например, $\alpha=-1$, $\beta=2$, тогда

$$x=\frac{2-t}{1+t},\quad t=\frac{2-x}{1+x},\quad dx=\frac{-3\,dt}{(1+t)^2}$$

$$x^2+2=\frac{3t^2+6}{(t+1)^2},\quad 2x^2-2x+5=\frac{9t^2+9}{(t+1)^2}$$

Заменим в интеграле переменную x на t:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}=-\frac{1}{3}\int\frac{|t+1|\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$$

при $t+1>0$, т.е., при $x>-1$, это равно

$$-\frac{1}{3}\int\frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}.$$

Первый интеграл: подстановка $u^2=t^2+1$

получаем $-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2+1}$

Второй интеграл: подстановка Абеля

$$v=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\text{ откуда}$$

$$v^2(t^2+1)=t^2,\quad t^2+2=\frac{2-v^2}{1-v^2}$$

Дифференцируем равенство $v\sqrt{t^2+1}=t$:

$$dv\sqrt{t^2+1}+v^2dt=dt,\quad \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{dv}{1-v^2}$$

Следовательно, интеграл приводится к виду

$-\frac{1}{3}\int\frac{dv}{2-v^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} u - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v} + C$$

Возвращаемся к переменной x и получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} -$$

$$- \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2-x} + C$$

При $x<-1$. Получается аналогичная формула.

Задача 7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$

Решение: Положим сначала $t=2x+1$, а затем $t=2\operatorname{sh} u$:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} =$$

$$= -\frac{1}{8}\operatorname{cth} u + C = -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}}{\operatorname{sh} u} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{t^2+4}}{8t} + C = -\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{8(2x+1)} + C$$

---

(3) Интегралы вида $\int x^m (ax^n+b)^p \, dx$

где $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a\neq 0, b\neq 0, n\neq 0, p\neq 0$

называются интегралами от дифференциального бинома

Они сводятся к интегралам от рациональных функций в следующих 3х случаях:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & p \in \mathbb{Z}; \\ 2) & \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}; \\ 3) & \dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}. \end{array}\right\} \quad (5)$$

В случае 1) подстановка $x = t^N$, где N – общий знаменатель дробей m и n;
В случаях 2) и 3) подстановки, соответственно $ax^n + b = t^s$ и $a + bx^{-n} = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Если ни одно из условий (5) не выполнено, то интеграл нельзя выразить через элементарных функции (теорема Чебышева).

Задача 8. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Решение. В этом случае $a=1$, $b=1$; $m=0$, $n=4$, $p=-1/4$.

Заметим, что $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ – целое.

Значит, подстановка $1 + x^{-4} = t^4$

тогда: $t = (1+x^{-4})^{1/4}$, $x = (t^4-1)^{-1/4}$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = t^{-1}\cdot(t^4-1)^{1/4}, \quad dx = -t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt$$

Следовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C$$