1 курс Мат. Анализ. Семинар № 15.

Интегрирование трансцендентных функций

① Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция переменных u и v сводятся к интегралам от рац. функций с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Эта подстановка преобразует интеграл к следующему виду:

$$2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Однако, это приводит к громоздким вычислениям. Иногда можно найти более простой путь. Если выполнены такие свойства: (одно из свойств)

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

тогда удобнее использовать такие подстановки:

1) $t = \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
2) $t = \sin x$, $x \in (0, \pi)$
3) $t = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Возможны и другие приемы вычисления таких интегралов.

② <u>Интегралы</u> $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

сводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$.
Получаются интегралы вида

$$2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}$$

Иногда помогают более простые подстановки
$t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$, $t = \operatorname{th} x$.

---

③ <u>Интегралы вида</u> $\int P_n(x) f(x)\,dx$,

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, а $f(x)$ — одна из функций: e^{ax}, $\sin ax$, $\cos bx$, $\ln x$, $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\operatorname{arctg} ax$, $\operatorname{arcctg} ax$, вычисляются многократным интегрированием по частям.

---

④ Интегралы от трансцендентных функций часто не выражаются через элементарные функции. Вот примеры таких интегралов:

1) $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$; 2) $\int e^{-x^2/2}\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(x\in(0,1))$

Первообразные этих функций называются

1) $\operatorname{Si}(x)$ интегральный синус $(\operatorname{Si}(0)=0)$

2) $\Phi_0(x)$ интеграл вероятностей $(\Phi_0(0)=0)$

3) $\operatorname{li}(x)$ интегральный логарифм $\left(\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{li}(x)=0\right)$.

Задача 1 Найти интеграл $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$

Решение: положим $t = tg(x/2)$, $x \in (-\pi, \pi)$

Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = 2\int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2\int (t+3)^{-2} dt = -\frac{2}{t+3} + C = \frac{2}{3+tg(\frac{x}{2})} + C.$$

Задача 2 Найти интеграл $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx$

Решение:

Подынтегральная функция обладает свойством:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

поэтому сработает подстановка $t = tg\, x$.

Разделим числитель и знаменатель на $\cos^3 x$:

$$\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + \cos^3 x} dx = \int \frac{2tg\, x + 3}{tg^2 x + 9} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{2tg\, x + 3}{tg^2 x + 9} d(tg\, x) = \int \frac{2t+3}{t^2+9} dt = 2\int \frac{t}{t^2+9} dt +$$

$$+ 3\int \frac{dt}{t^2+9} = \ln(t^2+9) + arctg\left(\frac{t}{3}\right) + C =$$

$$= \ln(tg^2 x + 9) + arctg \frac{tg\, x}{3} + C.$$

Задача 3. Найти интеграл $\int ch^3x \cdot sh^8x\,dx$

Решение: Подынтегральная ф-я имеет св-во:

$$R(sh\,x, -ch\,x) = -R(sh\,x, ch\,x).$$

Применима подстановка $t = sh\,x$.

$$\int ch^3x\, sh^8x\,dx = \int (1+sh^2x)\,sh^8x\,d(sh\,x) =$$

$$= \int (1+t^2)t^8dt = t^9/9 + t^{11}/11 + C = \frac{1}{9}sh^9x + \frac{1}{11}sh^{11}x + C$$

Задача 4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x}$

Решение: Используем тождество $\sin^2x + \cos^2x = 1$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2x + \cos^2x}{\sin x \cdot \cos^2x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2x}dx + \int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2x} - \int \frac{d\cos x}{1-\cos^2x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

Задача 5. Найти интеграл $\int \cos^4x\,dx$

Решение: Используем формулу $\cos^2y = \frac{1+\cos 2y}{2}$ (2 раза)

$$\int \cos^4x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{3x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

Задача 6. Найти интеграл $\int \frac{2sh\,x + 3ch\,x}{4sh\,x + 5ch\,x}dx$

Решение: Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и производной знаменателя:

$$2\,\mathrm{sh}\,x + 3\,\mathrm{ch}\,x = \alpha(4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x) + \beta(4\,\mathrm{ch}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x)$$

Для чисел α и β получаем систему:

$$\begin{cases} 4\alpha + 5\beta = 2 \\ 5\alpha + 4\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 7/9 \\ \beta = -2/9 \end{cases}$$

Следовательно:

$$\int \frac{2\,\mathrm{sh}\,x + 3\,\mathrm{ch}\,x}{4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x}\,dx = \frac{7}{9}\int dx - \frac{2}{9}\int \frac{4\,\mathrm{ch}\,x + 5\,\mathrm{sh}\,x}{4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x}\,dx =$$

$$= \frac{7x}{9} - \frac{2}{9}\int \frac{d(4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x)}{4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x} = \frac{7}{9}x + \ln(4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x) + C$$

Задача 7. Найти интеграл $\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx$

Решение. Будем интегрировать по частям

$$u = \mathrm{ch}\,x, \quad dv = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx$$

$$du = \mathrm{sh}\,x\,dx, \quad v = \int \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx = \int \frac{d\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^3 x} = -\frac{1}{2\,\mathrm{sh}^2 x}$$

Тогда:

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = -\frac{\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}^2 x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\,x} = -\frac{\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}^2 x} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}^2 x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right| + C$$

Задача 8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$

Решение: Сделаем подстановку $t = \sin x$. Получим дифференциальный бином:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cdot \cos x}} = \int \frac{d \sin x}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cdot \cos^4 x}} = \int t^{-\frac{5}{3}} \cdot (1-t^2)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Здесь $a = -1$, $b = 1$, $m = -\frac{5}{3}$, $n = 2$, $p = -\frac{2}{3}$

Условие: $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5/3+1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1$ является целым числом.

Можно применить подстановку: $-1 + t^{-2} = u^3$

Однако, можно сделать другую подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cdot \cos x}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^5 x / \cos^5 x}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int (\operatorname{tg} x)^{-5/3} d \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} (\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}} + C.$$

Задача 9. Найти $J = \int e^{ax} \sin bx \, dx$

Решение: Будем интегрировать по частям:

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} \int \sin bx \, d e^{ax} = \frac{1}{a} \sin bx \cdot e^{ax} -$$

$$- \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} \sin bx \cdot e^{ax} - \frac{b}{a^2} \int \cos bx \, d e^{ax} =$$

$$= \frac{1}{a}\sin bx\, e^{ax} - \frac{b}{a^2}\left(\cos bx \cdot e^{ax} + b\int \sin bx\, e^{ax}\, dx\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx\right)e^{ax} - \frac{b^2}{a^2} J \quad \Rightarrow$$

$$J\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = \left(\frac{1}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx\right)e^{ax}$$

$$J = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)e^{ax}$$

<u>Второе решение</u>: ф-ла Эйлера. $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

$$J = \int e^{ax}\sin bx\, dx = \int e^{ax}\,\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2i}\int\left(e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} - \frac{e^{(a-ib)x}}{a-ib}\right) = \quad \text{(на сопряженное}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{ibx}(a-ib) - e^{-ibx}(a+ib)\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{2i}\Big((\cos bx + i\sin bx)(a-ib) - (\cos bx - i\sin bx)(a+ib)\Big)$$

(оставляем только мнимые части)

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{2i}\left(-ib\cos bx + ia\sin bx - ib\cos bx + ia\sin bx\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right).$$

Задача 10. Доказать, что если $P_n(x)$ – многочлен степени n, то

$$\int P(x)\, e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C$$

Решение: Интегрируем по частям

$$\int P(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} P(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax} P'(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} P(x) - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} e^{ax} P'(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax} P''(x)\, dx\right) =$$

$$= e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2}\right) + \frac{1}{a^2}\int e^{ax} P''(x)\, dx.$$

Применяя метод мат. индукции, находим

$$\int P(x) e^{ax} = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}}\right) +$$

$$+ (-1)^{k+1}\frac{1}{a^{k+1}} \cdot \int e^{ax} P^{(k+1)}(x)\, dx$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Подставляем $k = n$, учитывая, что $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$

Получаем искомую формулу

Задача 11. Доказать формулы:

а) $$\int P(x) \cdot \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{\cos ax}{a^2}\left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(V)}(x)}{a^4} + \ldots\right) + C$$

б) $$\int P(x)\sin ax\,dx = \frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} + \ldots\right) + \frac{\sin ax}{a^2}\left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(V)}(x)}{a^4} - \ldots\right) + C$$

<u>Решение:</u> В задаче 10 подставим вместо $a \to ia$, где $i^2 = -1$.

$$\int P(x)e^{iax}\,dx = e^{iax}\left(-i\frac{P(x)}{a} + \frac{P'(x)}{a^2} + i\frac{P''(x)}{a^3} + \ldots\right) + C$$

Далее используем формулу Эйлера и разделяем вещественную и мнимую части.

<u>Задача 12.</u> Выразить $\int \frac{dx}{\ln^2 x}$ через интегральный логарифм $li(x)$ и элементарные функции.

<u>Решение:</u> Используем формулу интегрирования по частям.

$$u = x, \quad dv = \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x} \Rightarrow$$

$$du = dx \quad v = \int\frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}$$

Следовательно:

$$\int\frac{dx}{\ln^2 x} = -\frac{x}{\ln x} + \int\frac{dx}{\ln x} = -\frac{x}{\ln x} + li(x) + C$$

Задача 13. Доказать формулу: $(n > 1)$

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx = -e^x\left(\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!\,x}\right) + \frac{li(e^x)}{(n-1)!} + C.$$

Решение: при $n = 1$

$$\int \frac{e^x}{x}dx = li(e^x) + C \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} = \left(li(e^x)\right)' =$$

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{e^x}{\ln(e^x)}dx = \int \frac{de^x}{\ln(e^x)} \Bigg| = \frac{e^x}{\ln(e^x)} = \frac{e^x}{x}.$$

при $n = 2$. По частям:

$$\int \frac{e^x}{x^2}dx = -\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}dx =$$

$$= -\frac{e^x}{x} + li(e^x) + C.$$

Далее по индукции.

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)}\int e^x d\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) = -\frac{1}{(n-1)}\frac{e^x}{x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)}\int \frac{e^x}{x^{n-1}}dx$$

$$= -e^x\left(\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!\,x^1}\right) + \frac{li(e^x) + C}{(n-1)!}$$

Задача 14. При каком условии интеграл

$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$, где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$,

представляет собой элементарную ф-цию?

Решение: Воспользуемся задачей 13:

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx = \int \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right)e^x dx =$$

$$= \underbrace{a_0 \cdot e^x} + \underbrace{a_1 \cdot \underline{li(e^x)}} \underbrace{- \frac{a_2}{x}e^x + a_2 \cdot \underline{li(e^x)}} -$$

$$\underbrace{- \frac{a_3 e^x}{2x^2} - \frac{a_3 e^x}{2x} + \frac{a_3}{2}\underline{li(e^x)}} - \dots \underbrace{- \frac{a_n e^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a_n e^x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}} - \dots$$

$$\underbrace{- \frac{a_n e^x}{(n-1)!\,x} + \frac{a_n}{(n-1)!}\underline{li(e^x)}} =$$

$$= Q\left(\frac{1}{x}\right)e^x + \left(a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!}\right) li(e^x)$$

<u>Ответ:</u> $a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{3!} + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0.$