

1к Мат. Анализ. Семестр 2/16
Дифференциальный исчисление

① Исчисление Римана

Задача аппроксимации $f(x)$, $x \in [a, b]$.
Разделение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$, $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
 $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$ — открытое разбиение

Мера разбиения: $|\tau| = \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|$

Выбор $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1, \dots, n$
 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Исчисление суммы Римана

$$S = S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Определение 1. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману, если
 $\exists I \in \mathbb{R}$ т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{|\tau| \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) = I, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau = \{x_0, \dots, x_n\}, |\tau| < \delta \forall \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \\ & \left| I - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

I — единственный интеграл по Риману
функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$. Обозначается:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Обозначим $\int_a^b f(x) dx$ — интеграл по Риману.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 2 Множество X имеет нуль меры, $\mu(X) = 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ набор непересекающихся м-ов X отрезками $[a_k, b_k]$,
 $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon$.

Примеры множеств нуль меры: $\forall$ счетное множество, м-ов Кантора.

Теорема. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману $\Leftrightarrow f$ - ограничена и множество точек разрыва функции f имеет нуль меры.

Следствие Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ - интегрируема по Риману.

Пример 1. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$
 $f(0) = 0$.

Интегрируема по Риману. М-ов всех разрывов $X = \{0\}$, $\mu(X) = 0$.

Пример 2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$
 $f(0) = 0$

Не интегрируема по Риману, т.к. не ограничена.

Аналогично $f(x) = \frac{1}{x^p}$ - не инте. $\forall p > 0$.

Пример 3. Функция Дирихле:

$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, $X = [0, 1]$
 $\mu(X) = 1$. Не инте.

Пример 4. Функция Римана

$$f(x) = R(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} \\ \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

$$X = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x_k \in \left[x_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right] = [a_k, b_k]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = 2\varepsilon. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon, \text{ т.е. } \mu(X) = 0.$$

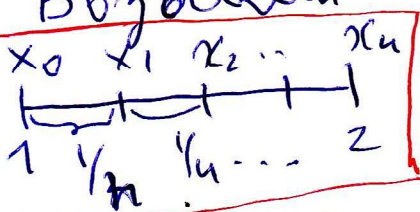
Вопрос: чему равно $\int_0^1 R(x) dx$?

(Как это обосновать?)

Задача 1. Найти интеграл $\int_1^2 x^2 dx$ с помощью интегральных сумм.

Решение. Функция $y = x^2$ непрерывна на $[1, 2]$. Интегрируема, монотонна. Достаточно взять любое разбиение τ , $|\tau| \rightarrow 0$ и любой ξ .

Возьмем $x_k^{(n)} = 1 + \frac{k}{n}, k = 0, \dots, n$



$$\xi_k^{(n)} = x_k^{(n)}, \quad |\tau| = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} S(f, \tau, \xi) &= \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (n+k)^3 = \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (n^2 + 2kn + k^2) = \frac{1}{n^3} \left(n \cdot n^2 + 2n \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n^3} \left(n^3 + 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, \tau_n^{(n)}, \xi^{(n)}) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Вспомогательное разбиение отрезка $[a, b]$
 Пусть x_k — равномерно расположенные точки от-
 реиска: $x_k = x_0 \cdot q^k, k = 1, 2, \dots, n,$

$$x_0 = a, x_n = b, q = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$$

$$\text{Тогда } |\tau| = x_0 \cdot \max_{k=1, \dots, n} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}} \right) = a \cdot \left[\frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

$$= b \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Положим $\xi_k = x_k, k = 1, \dots, n,$

Задача 2. Вычислить $\int_a^b x^p dx, p \neq -1$
 разбиение отрезка $[a, b]$ равно

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = a \cdot (q^k - q^{k-1})$$

Решение:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k^p \cdot \Delta x_k =$$

$$= a^{p+1} \sum_{k=1}^n q^{pk} \cdot (q^k - q^{k-1}) = a^{p+1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{k=1}^n q^{(p+1)k} =$$

$$= a^{p+1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdot q^{p+1} \sum_{k=0}^{n-1} q^{(p+1)k} = a^{p+1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) q^{p+1} \cdot \frac{q^{(p+1)n} - 1}{q^{p+1} - 1} =$$

$$= a^{p+1} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}} \cdot \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{p+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}} - 1} \right) =$$

$$= (b^{p+1} - a^{p+1}) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p+1}{n}}} \right) = (b^{p+1} - a^{p+1}) \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{n}} - 1}}{\frac{p+1}{x^{\frac{p+1}{n}} - 1}}$$

Доказательство $\frac{a}{b} = x$, $x < 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1/n} - 1}{x^{\frac{p+1}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{(p+1) \ln x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$x^{1/n} = e^{\frac{\ln x}{n}} = 1 + \frac{\ln x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$x^{\frac{p+1}{n}} = e^{\frac{(p+1) \ln x}{n}} = 1 + \frac{(p+1) \ln x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x + o(1)}{(p+1) \ln x + o(1)} = \frac{\ln x}{(p+1) \ln x} = \frac{1}{p+1}$$

Аналогично:

$$\delta(\epsilon, \tau, \xi) \rightarrow \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

Итого: $\int_a^b x^p = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$

Задача 3. Найти $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$

Решение: Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
Пронизываем разбиение!

Выберем $\xi_k = \sqrt{x_k \cdot x_{k-1}}$, $k=1, 2, \dots, n$

Тогда $\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{\xi_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k \cdot x_{k-1}} =$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k} \right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

Отсюда: $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

② Свойства интеграла Римана:

1. $\int_a^b dx = b - a$

2. Если φ -ун $f(x)$ интегрируем на отрезке $[a, b]$, то она интегрируем на любом отрезке $[a^*, b^*] \subseteq [a, b]$.

3. Аддитивность интеграла: Если $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4. Линейность интеграла. Если φ -ун $f_k(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то для любых чисел $\lambda_k, k=1, \dots, n$, принадлежащих $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(x) dx.$$

5. Если $f(x), g(x)$ — непрерывны на $[a, b]$,
то $f(x) \cdot g(x)$ — непрерывна на $[a, b]$.

6. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и
 $\inf_{x \in [a, b]} f(x) > 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ — непрерывна на $[a, b]$.

7. Если $f(x) \geq g(x)$ — непрерывны на $[a, b]$,
и $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

В частности, если $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

8. Если $f(x)$ — непрерывна, то $|f(x)|$ —
непрерывна и $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

9. Непрерывность интегрируема. Если p -чл
 $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ и $G(x) = \int_x^b f(t) dt$

непрерывна на $[a, b]$.

③ Формула Ньютона — Лейбница. Глав-
ная формула математического анализа!

Теорема 1 Если функция $f(x)$ интегрируема
на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то

определена. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ непрерывна
в точке x_0 , причем $F'(x_0) = f(x_0)$.

Лемма При непрерывном условии Тейлора
определена $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ тоже непрерывна
в т. x_0 , причем $G'(x_0) = -f(x_0)$.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,
то она имеет на этом отрезке первообраз-
ную, причем любая из первообразных отлича-
ется от другой на постоянную величину, т.е.

$$\int_a^x f(t) dx = \int_a^x f(t) dt + C$$

Теорема 3. (Формула Ньютона-Лейбница)
Если определена $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,
то для любой ее первообразной $F(x)$
имеет место равенство:
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Замечание. Если $f(x) \in C[a, b]$, $F(x)$ - ее
первообразная, то $\forall x \in (a, b)$ (внутренне)
 $F'(x) = f(x)$. А на концах a и b имеем:
 $F'_n(a) = f(a)$, $F'_n(b) = f(b)$

Задача 4. Найти с помощью определенного интеграла

$$\int_a^b x^\alpha dx, \quad 0 < a < b.$$

Решение: $f(x) = x^\alpha$, тогда $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
 $F(x) = \ln x$ при $\alpha = -1$. Проверим

a) $\int_a^b x^\alpha dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b =$
 $= \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha \neq -1$

б) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$

Задача 5. Найти интеграл

$$\int_{sh 1}^{sh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Решение: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Проверка: $F'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int_{sh 1}^{sh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_{sh 1}^{sh 2} =$$

$$= \ln \frac{\operatorname{sh} 2 + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 2}}{\operatorname{sh} 1 + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 1}} = \ln \frac{\operatorname{sh} 2 + \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1} =$$

$$= \ln \frac{\frac{e^2 - e^{-2}}{2} + \frac{e^2 + e^{-2}}{2}}{\frac{e^1 - e^{-1}}{2} + \frac{e^1 + e^{-1}}{2}} = \ln \frac{e^2}{e^1} = \ln e = 1$$

Задача 5. Доказать, что $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad m \neq n$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad m \neq n$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0$

Решение: 1) Воспользуемся формулами
 Тригонометрическими тождествами: $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

Тогда если $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично выведем 2) и 3)

Задача 6. Доказать неравенство:

$$\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} \, dx < \frac{1}{20}.$$

Решение: Проверим функцию на $[0, 1]$
 убывающую ли.

$$\frac{x^{19}}{\sqrt{2}} < \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} < x^{19}$$

$$\frac{1}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^{19} dx < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} dx < \int_0^1 x^{19} dx = \frac{1}{20}$$

Задача 7 Докажите неравенство

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx < \frac{1}{2}(e-1)$$

Решение: Функция $f(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}$

имеет производную: $f'(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2(2-x)^2}$,

которая обращается в нуль при $x = 1/2$
 и меняет знак с $-$ на $+$, т.е. имеет
 минимум, при $f(1/2) = 4/9$.

Максимум достигается на краях: $f(0) = f(1) = 1/2$

Следовательно $\frac{4}{9} < \frac{1}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}$

Тогда $\frac{4}{9}e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}e^x$, т.е.

$$\frac{4}{9} \int_0^1 e^x dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx < \frac{1}{2} \int_0^1 e^x dx \Rightarrow$$

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx < \frac{1}{2}(e-1)$$

Aufgabe 8. Berechnen unendlichen Summe:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Nachprüfen für $n=1$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos 2kx = \frac{\sin(2n-1)x}{2 \sin x}$$

Dies gilt für $n=1$: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Induktionsschritt: $2 \sin x \cdot \cos 2kx = \sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x$

$$\sin x + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \sin x \cos 2kx = \cancel{\sin x} + (\cancel{\sin 3x} - \cancel{\sin x}) + \dots + (\sin(2n-1)x - \cancel{\sin(2n-3)x}) = \sin(2n-1)x$$

Beachte, dass $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx dx = \frac{\sin 2kx}{2k} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

Ausformulieren: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

Ergebn: $I = \frac{\pi}{2}$