1к

Мат. Анализ. Семинар № 17

Определенный интеграл Римана (продолжение)

① Формула замены переменного

Задана функция $f(x) \in C[a, b]$ и функция $\varphi(x) \in C^1[\alpha, \beta]$, причем $\forall\ t \in [\alpha, \beta]\ \varphi(t) \in [a, b]$

Тогда определена композиция $g(t) = f(\varphi(t))$.

Если $\alpha_0 \in [\alpha, \beta]$, $\beta_0 \in [\alpha, \beta]$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$

тогда
$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Называется <u>формулой замены переменного</u> в определенном интеграле.

② Формула интегрирования по частям

Заданы функции $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$

Тогда
$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\,dx$$

Называется <u>формулой интегрирования по частям</u> в определенном интеграле.

Остается справедливой, если $u(x)$ и $v(x)$ интегрируемы на $[a, b]$

Задача 1 Найти интеграл $\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$

Решение: Применим формулу замены переменного, положив $1+x = t^2$, $t > 0$.

Тогда $dx = 2t\,dt$, а новые пределы интегрирования: $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2}$. Получаем

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,t^2\,dt.$$

Задача свелась к интегралу от многочлена:

$$\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t^2\,dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-1}{5} - \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = \frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$$

Ответ: $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$.

<u>Задача 2</u>. Найти интеграл $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

с помощью замены $x = a\sin t$.

$dx = a\cos t\,dt$

<u>Решение</u>: Имеем

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

<u>Задача 3</u>. Доказать равенство

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,dt$$

<u>Решение</u>: Сделаем замену $x = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$

$dx = \frac{dt}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$; пределы: $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{dt}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,dt$$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$.

Решение: Замена переменной $t = x - \frac{1}{x}$ в неопределенном интеграле: при $x \neq 0$

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C$$

Следовательно: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)' = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $x \neq 0$.

Заметим, что:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Поэтому функция:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

будет непрерывной на всей оси $\mathbb{R}$, причем

$$F'(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \text{ при } x \neq 0.$$

Тогда в силу непрерывности, $F'(0) = 1$, т.е.

$F'(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $F(x)$ является первообразной для $\frac{1+x^2}{1+x^4}$ на $\mathbb{R}$, тогда:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = F(2) - F(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{4} + \pi\right).$$

Задача 5. (Из листка 2). Найти

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cdot\cos x}.$$ Замена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

$0\le\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\le x<\pi$

Решение:

Воспользуемся тождеством $\cos(\pi-x)=\cos x$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=$$

$\pi-x=y$

$$=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos(\pi-x)}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}-\int_0^{-\pi}\frac{dy}{1+\varepsilon\cos y}=$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=$$

$$x=2\operatorname{arctg}t$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)+\varepsilon(1-t^2)}=\int\frac{2dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=$$

$$=\frac{2}{1-\varepsilon}\int\frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)^2+t^2}=\frac{2}{1-\varepsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}}=$$

$$=\boxed{\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}}}=F(x)+C,\quad x\in[0,\pi).$$

В силу непрерывности подинт. ф-ции:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\lim_{\delta\to0+}\int_0^{\pi-\delta}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\lim_{\delta\to0+}F(\pi-\delta)-F(0)=$$

$$=\lim_{\delta\to0+}\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi-\delta}{2}}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}}\right)=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

Задача 6. Найти интеграл $\int\limits_0^1 e^x \cdot \arcsin e^{-x} dx$.

Решение: Найдем первообразную подынт. ф.
Замена $t = e^{-x}$, а потом инт. по частям:

$$\int e^x \arcsin e^{-x} dx = -\int \frac{\arcsin e^{-x}}{(e^{-x})^2} de^{-x} = -\int \frac{\arcsin t}{t^2} dt =$$

$$= \int \arcsin t \, d\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\arcsin t}{t} - \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}.$$

Отдельно найдем

$$-\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}\right) + C$$ (Длинный логарифм).

Окончательно: $x \in (0,1)$

$$\int e^x \arcsin e^{-x} dx = e^x \arcsin e^{-x} + \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right).$$

Применяем ф. Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_0^1 e^x \arccos e^{-x} dx = e \cdot \arcsin e^{-1} + \ln\left(e + \sqrt{e^2 - 1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Задача 7. Найти $\int\limits_1^2 \ln x \, dx$

Решение: формула интегрирования по частям

$$\int\limits_1^2 \ln x \, dx = x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = 2 \cdot \ln 2 - 1$$

Задача 8. Найти $J_{\alpha,n} = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x\,dx$, $\alpha>0$, $n\in\mathbb{N}$

Решение: Подынтегральная ф-я $f(x)=x^\alpha \ln^n x$ определена и непрерывна на $(0,1]$ и у нее $\exists \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$. Доопределим её нулем при $x=0$. Получим непрерывную и, следовательно, интегрируемую функцию. Интегрируем эту функцию. Интегрируем по частям:

$$J_{\alpha,n} = \int\limits_0^1 (\ln x)^n \, d\,\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} (\ln x)^n \Big|_{+0}^{1} - \frac{n}{\alpha+1}\int\limits_0^1 x^\alpha (\ln x)^{n-1} dx$$

$$= -\frac{n}{\alpha+1} J_{\alpha,n-1} \Rightarrow J_{\alpha,n} = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n}\cdot J_{\alpha,0}$$

$$J_{\alpha,0} = \int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow \boxed{J_{\alpha,n} = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}}$$

Задача 9. Вычислить: а) $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение: а) Интегрируем по частям

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(n-1)} x\, d\sin x = \overbrace{\sin x\cdot \cos^{(n-1)} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=0} +$$

$$+(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^{(n-2)}(x)\,dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{(n-2)} x\,dx =$$

$$=(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(n-2)} x\,dx - (n-1)\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$, т.е.

$$I_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{(n-3)}{n-2} \times \dots \begin{cases} \times I_0 = \frac{\pi}{2} & n\text{ — четные} \\ \times I_1 = 1 & n\text{ — нечетные} \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> $$I_n = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4 \cdots 2k} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4 \cdots 2k}{1\cdot 3 \cdots (2k+1)} = \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

б) $$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{(x = \sin t)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t \cdot \cos t}{\cos t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt.$$

Воспользуемся формулой $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dt = I_n.$$

$\frac{\pi}{2} - t = x$

---

③ <u>Дифференцирование под знаком интеграла</u>

Пусть $f \in C[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$

<u>Тогда:</u> $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = -f(x)$.

Обобщим это правило на более общий случай.

Задана функция 2-х аргументов $f(x,t)$, $t \in [a,b]$, $x \in [A,B]$, $f \in C[A,B]\times[a,b]$, $f'_x \in C([A,B]\times[a,b])$.

Заданы функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^1[A,B]$, причём $\varphi(x) \in [a,b]$, $\psi(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [A,B]$

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt.$$

Тогда: $F(x) \in C^1[A,B]$, причём

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,t)\,dt - f(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) + f(x,\psi(x))\,\psi'(x).$$

Доказательство: Рассмотрим функцию 3-х арг.

$$G(x,y_1,y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,t)\,dt.$$

Найдем ее частные производные по x, y_1 и y_2

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x,t)\,dt.$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_1} = -f(x,y_1), \quad \frac{\partial G}{\partial y_2} = f(x,y_2)$$

По правилу дифференцирования композиции

$F(x) = G(x,\varphi(x),\psi(x))$. Получим:

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}G(x,\varphi(x),\psi(x))=\frac{\partial G}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x))+$$

$$+\frac{\partial G}{\partial y_1}(x,\varphi(x),\psi(x))\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{\partial G}{\partial y_2}(x,\varphi(x),\psi(x))\cdot\frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(x,t)\,dt-f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)+f(x,\psi(x))\cdot\psi'(x)$$

Задача 10. Найти производные следующих функций:

а) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\,dt$; б) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{x\,dt}{\ln t}$; в) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{1/x}^{x}\sin(t^2x)\,dt$

Решение:

а) $$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

б) $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{x\cdot dt}{\ln t}=\int_{x}^{x^3}\frac{dt}{\ln t}+\frac{x}{\ln(x^3)}\cdot(x^3)'-\frac{x}{\ln(x^2)}\cdot(x^2)'=$$

$$=\int_{x}^{x^3}\frac{dt}{\ln t}+\frac{x^3}{\ln x}-\frac{x^2}{\ln x}$$

в) $$\frac{d}{dx}\int_{1/x}^{x}\sin(t^2x)\,dt=\int_{1/x}^{x}t^2\cos(t^2x)\,dt+\sin(x^3)+\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$