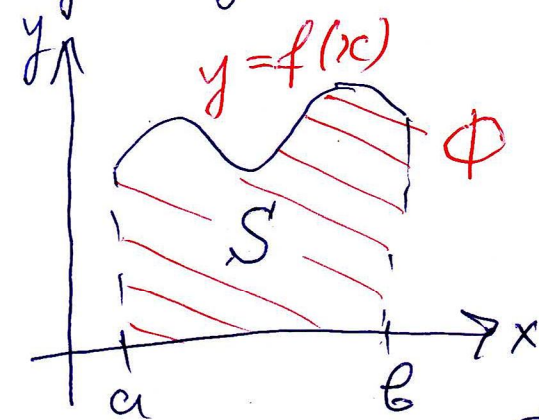


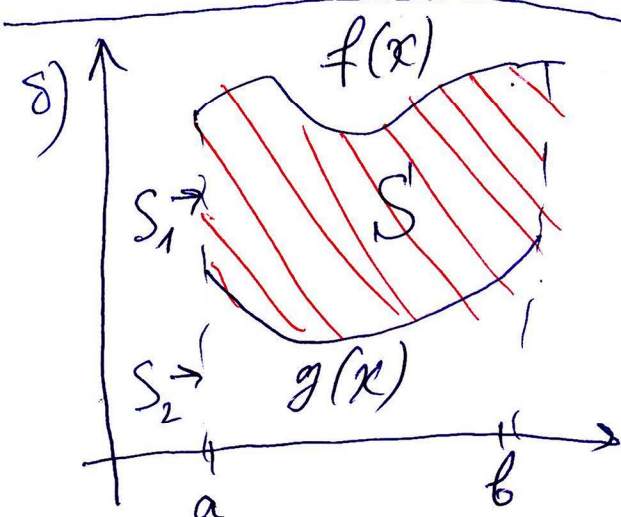
Применения интеграла в геометрииа) Вычисление площадей плоских фигур

Пусть $y=f(x)$, $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$; $f \in C[a, b]$.



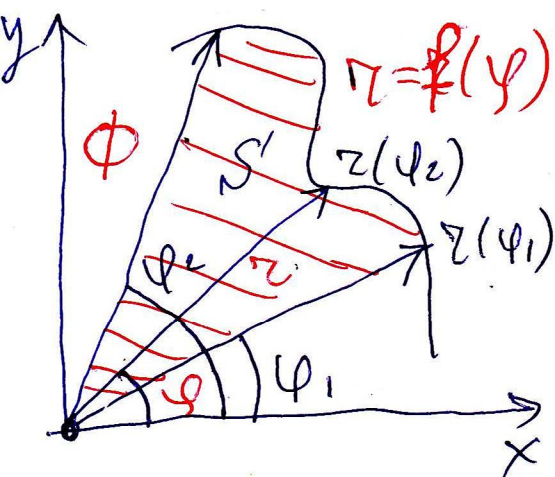
Площадь фигуры Φ , ограниченной графиком $y=f(x)$, и отрезком $[a, b]$ и осями $x=a$ и $x=b$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



$$f, g \in C[a, b], f(x) \geq g(x)$$

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

б) Площадь в полярных координатах

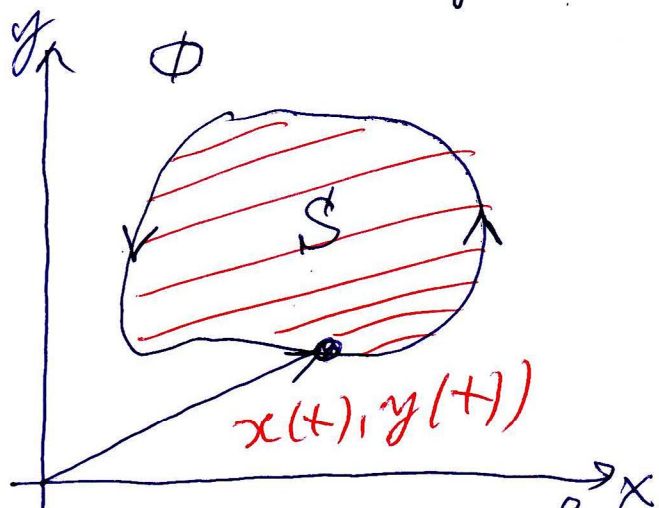
$$r = f(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

Площадь фигуры Φ между графиком $r=f(\varphi)$ и лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$.

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (f(\varphi))^2 d\varphi$$

2) Если $y = y(x)$
 искомая длина:



Задано в параметрическом виде:
 $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$
 $x, y \in C'[\alpha, \beta]$

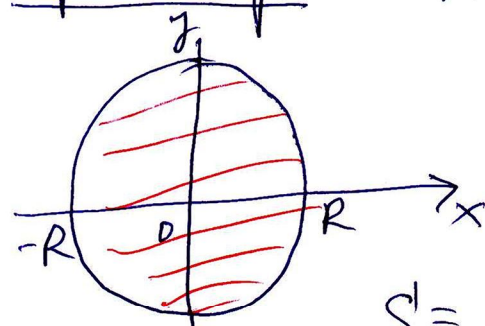
$$x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta).$$

Обход по часовой стрелке

Функция Φ - функция Грина

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \dot{y}(t) x(t) dt - \dot{x}(t) y(t) dt$$

Пример:



Положим $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} t \in [0, 2\pi]$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} dt = \pi R^2$$

Задача 1. Найти площадь фигуры Φ , ограниченной

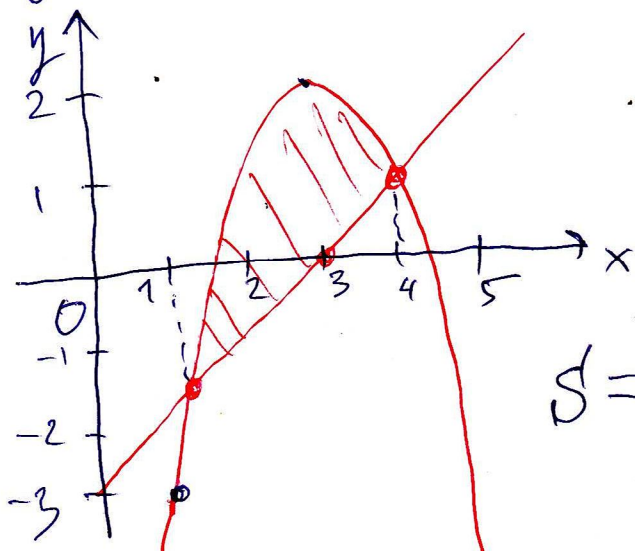
$$y = 6x - x^2 - 7 \text{ и } y = x - 3.$$

Решение. Находим точки пересечения графиков этих функций: абсциссы

$$6x - x^2 - 7 = x - 3$$

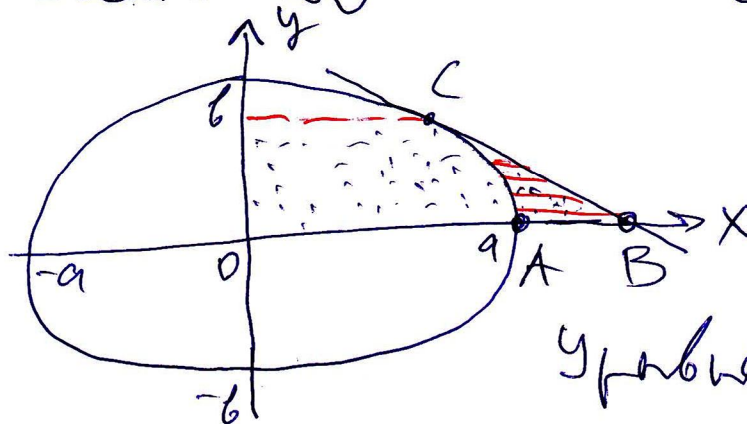
$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

$$S = \int_1^4 (6x - x^2 - 7 - (x - 3)) dx =$$



$$= \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left(\frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2}$$

Задача 2. к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписан касательная в точке $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2} \right) = (x_0, y_0)$



Найти площадь криволинейного ΔABC .

Решение:

Уравнение касательной к эллипсу:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2a} + \frac{y \cdot \sqrt{3}}{2b} = 1$$

Для отрезка AC: $x = x_1(y) = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, 0 \leq y \leq \frac{b\sqrt{3}}{2}$

Отрезка BC: $x = x_2(y) = a \left(2 - \frac{y\sqrt{3}}{b} \right), 0 \leq y \leq \frac{b\sqrt{3}}{2}$

Нужно: $S = S_1 - S_2 = \int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} (x_2(y) - x_1(y)) dy = J_2 - J_1$

$$J_2 = \int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} x_2(y) dy = \int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} a \left(2 - \frac{y\sqrt{3}}{b} \right) dy = 2ay - \frac{\sqrt{3}}{2b} y^2 \Big|_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{8} ab$$

Вычислим J_1 заменив

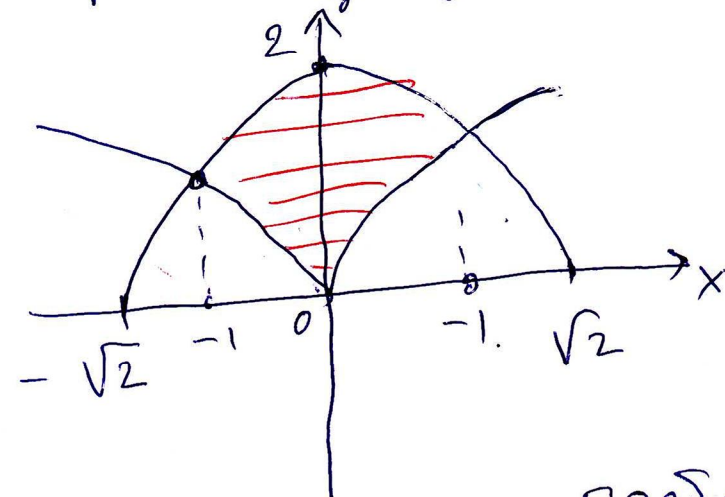
координаты поворачивая: $y = b \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

$$J_1 = \int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} x_1(y) dy = \int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy = ab \int_0^{\pi/3} \cos^2 t dt =$$

$$= ab \int_0^{\pi/3} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) ab$$

Итого: $S = J_2 - J_1 = ab(3\sqrt{3} - \pi)/6$.

Задача 3. Найти площадь фигуры между кривыми: $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$



Решение: торон кривых

$$f_1(x) = 2 - x^2$$

$$f_2(x) = |x|^{2/3}$$

$$2 - x^2 = |x|^{2/3}$$

поиск: $x_1 = 1, x_2 = -1$.

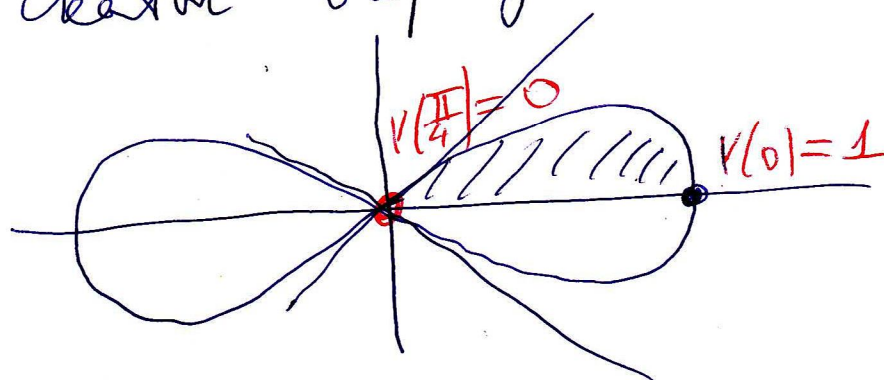
(Других нет, т.к. φ -ум монотонна)

$$S = \int_{-1}^1 (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - |x|^{2/3}) dx = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x^{2/3}) dx =$$

$$= 2 \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{5/3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \right) = 2 \cdot \frac{16}{15} = \frac{32}{15}$$

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой: $x^2 = a^2 \cos 2\varphi$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

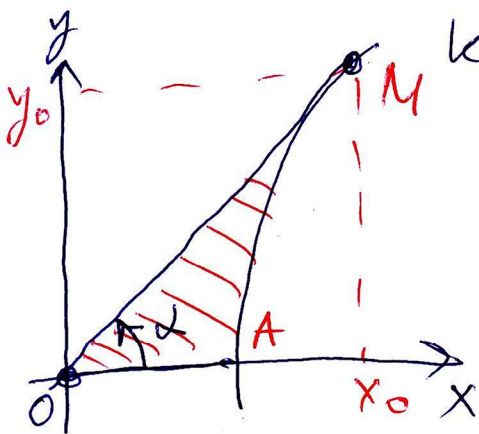


$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x(\pi/4) = 0 \end{cases}$$

$$S' = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r(\varphi)^2 d\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= a^2 \cdot \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

Задача 5. На гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$ дана точка $M(x_0, y_0)$. Найти площадь крив. $\triangle OAM$.



Решение. Перейдем к каноническим координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$
Уравнение гиперболы:

$$r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = a^2$$

$$r^2 \cos 2\varphi = a^2 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

Находим площадь:

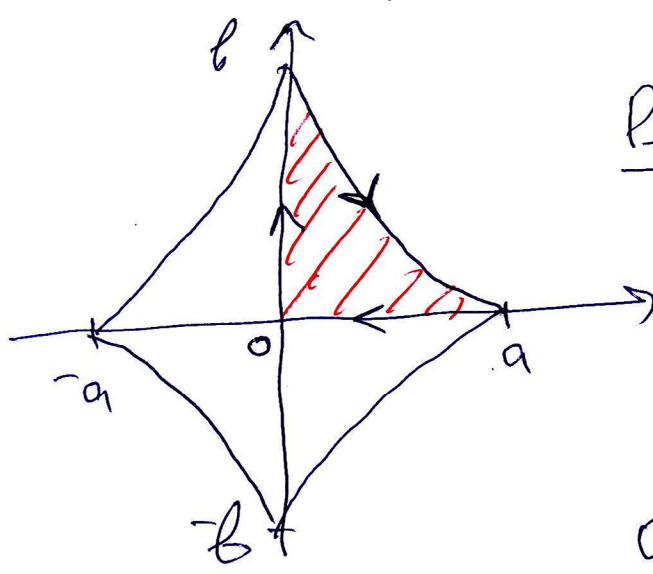
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d(\tan \varphi)}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{a^2}{4} \ln \left(\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \right), \text{ где } \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$$

Учитывая, что $x_0^2 - y_0^2 = a^2$. Получаем:

$$S = \frac{a^2}{4} \ln \frac{(x_0 + y_0)^2}{a^2} = \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x_0 + y_0}{a} \right)$$

Задача 6. Найти площадь группы, описанной кривой: $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.



Решение: группа имеет форму. Найти $S/4$.

Записать параметризацию

$$x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Воспользуемся формулой площади (по час стрелки!)

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (y(t) \cdot \dot{x}(t) - x(t) \cdot \dot{y}(t)) dt =$$

$$= \frac{3ab}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t) dt =$$

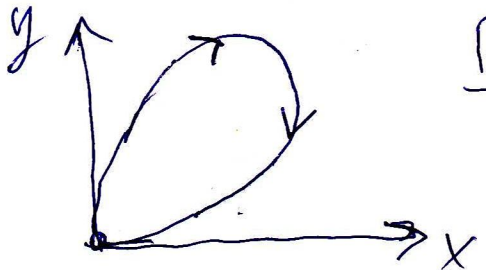
$$= \frac{3ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{3ab}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt =$$

$$= \frac{3\pi ab}{32}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{3\pi ab}{8}}$$

Задача 7. Найти площадь, описанную кривой

$$x = a \sin t \cos^2 t, y = a \cos t \sin^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$



Решение:

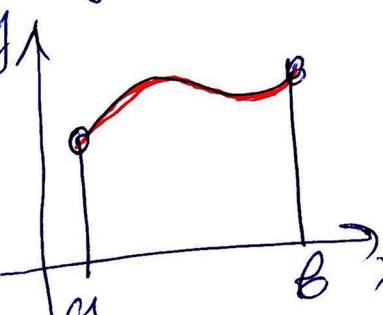
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot \dot{x}(t) - \dot{y}(t) \cdot x(t) dt =$$

по час. стрелке!

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos t \cdot \sin^2 t + (\cos^3 t - 2 \sin^2 t \cos t) - \\
 &\quad - \sin t \cos^2 t + (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t)] dt = \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t + \sin^2 t + (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 t \cdot \sin^2 t dt \\
 &= \frac{\pi a^2}{32} \quad \text{Or here: } \boxed{S = \frac{\pi a^2}{32}}
 \end{aligned}$$

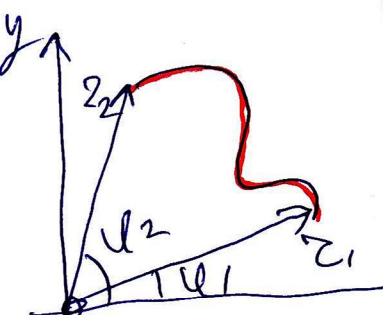
② Buna göre verilen kırımlar

a) Dünya koordinatları a) birbirine
 $y = f(x), x \in [a, b], f \in C^1[a, b]$



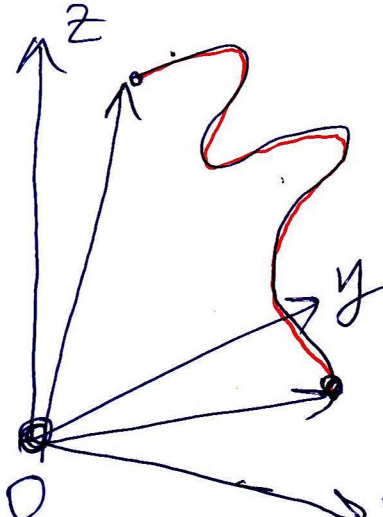
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

b) Buna göre verilen kırımlar
 $r = r(\varphi), \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$



$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

c) Kırımlar, Zamanın uzay
birbirine $\mathbb{R}^3$ $(\text{un } \mathbb{R}^2)$
 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$

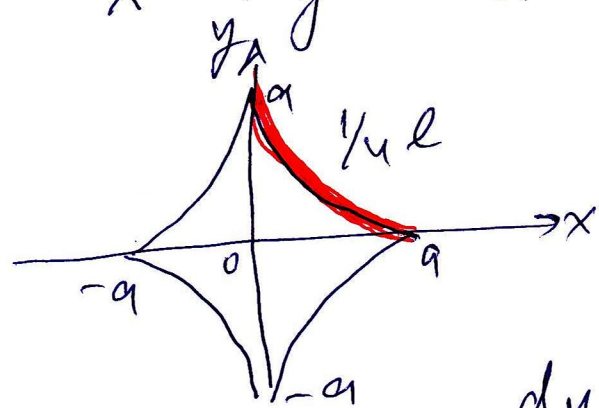


$$\begin{aligned}
 l &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt
 \end{aligned}$$

- 8 -

Aufgabe 8: Halbkreis gerade abspiegeln!

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



Parametrisierung: $y = y(x)$.

Unabhängigkeitsbedingung: $0 \leq x \leq a$

$$\frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2}{3} y^{-1/3} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} \Rightarrow$$

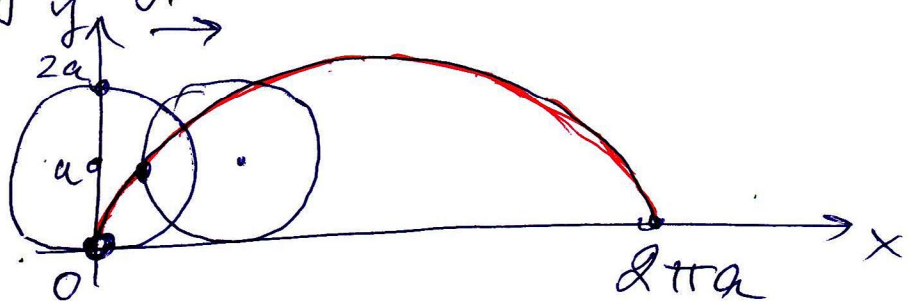
$$\frac{1}{4} l = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \frac{3}{2} a^{1/3} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a =$$

$$= \frac{3}{2} a \Rightarrow \boxed{l = 6a}$$

Aufgabe 9: Halbkreis gerade zusammenfassen.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \dot{y} = a \sin t$$

$$l = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= a \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt = a \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos t)^{\frac{1}{2}} dt = \\
 &= a 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \int_0^{\pi} \sin u du = x - \cos u \Big|_0^{\pi} = 8a
 \end{aligned}$$

$\frac{t}{2} = u$ Orhem: $\boxed{L = 8a}$

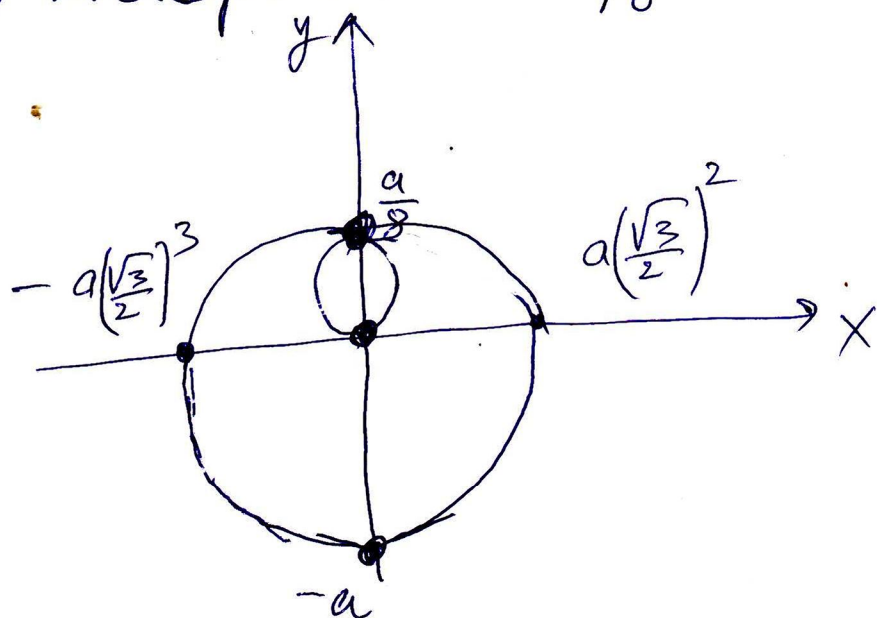
Задача 10. Найти длину кривой, заданной в полярных координатах $r = a \cdot \sin^3 \left(\frac{\varphi}{3} \right)$

$$0 \leq \varphi \leq 3\pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{8}$$

$$\varphi = \pi \Rightarrow r = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = a$$



$$\frac{dr}{d\varphi} = a \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$L = \int_0^{3\pi} \left(a^2 \cdot \sin^6 \left(\frac{\varphi}{3} \right) + a^2 \cdot \sin^4 \left(\frac{\varphi}{3} \right) \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= a \cdot \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = a \int_0^{3\pi} \frac{\cos \frac{2\varphi}{3} + 1}{2} d\varphi = \frac{3\pi a}{2}$$

Orhem: $\boxed{L = \frac{3\pi a}{2}}$

-10-

Задача 11 Найти гравит. путь тела в $\mathbb{R}^3$
 $x^2 = 2az - z^2, y = a \ln(1 - \frac{z}{2a})$
 $0 \leq z \leq z_0 < 2a$

Решение: Будем считать $t = \sqrt{\frac{z}{2a}}$,
 $0 \leq t < \sqrt{\frac{z_0}{2a}} = t_0$. Тогда

$$z = 2at^2, \quad x = 2at\sqrt{1-t^2}, \quad y = a \ln(1-t^2)$$

$$\dot{x} = 2a \cdot \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \dot{y} = -\frac{2at}{1-t^2}, \quad \dot{z} = 4at$$

$$l = \int_0^{t_0} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = 2a \int_0^{t_0} \frac{1}{1-t^2} dt =$$

$$= a \ln \frac{1+t_0}{1-t_0} = a \ln \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{z_0}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z_0}}.$$
