

Неодобственные интегралы от неопределенных функций

① Определение неопределенного интеграла.

Пусть $f(x)$, $x \in [a, b)$, пусть g - $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, \xi]$ $\forall \xi < b$.

Если $\exists \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^{\xi} f(x) dx$, то этот предел называется неодобственным интегралом и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Говорят: интеграл сходится, функция $f(x)$ интегрируема в неодобственном смысле на $[a, b)$.
В противном случае говорят: интеграл расходится и функция $f(x)$ неинтегрируема в неодобственном смысле.

Замечание: Если $f(x)$ -определена на $[a, b)$, то она интегрируема на $[a, b]$ в обычном смысле (по Риману). (Случай из критерия интегрируемости). Аналогично, неодобственный интеграл для непрерывных функций $f(x)$

Аналогично определяется неодобственный интеграл для функций $f(x)$, $x \in (a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \int_{\xi}^b f(x) dx.$$

② Свойства несобственных интегралов

1) аддитивность по промежуткам: $[a, b], [b, c]$...

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

2) линейность по переменным: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx \Rightarrow \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

3) Формула Коши-Вейерштрасса
 Пусть $f(x) \in C[a, b)$ и $F(x)$ - некий первообразная $f(x)$ на $[a, b)$, тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a), \text{ где}$$

$$F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x), \text{ если } \underline{\text{предел существует}}$$

4) Формула замены переменных. Пусть $f(x), x \in [a, b)$ - непрерывна, $\varphi(t), t \in [\alpha, \beta]$ - непрерывно дифференцируема, причем $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b$.

тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

При условии существования одного из этих интегралов, если один расходится, то и второй расходится.

5) Формула интегрирования по частям.
Пусть $u(x), v(x), x \in [a, b)$ - непрерывно дифференцируемы в $[a, b)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} u(x) \cdot v(x)$

Тогда
$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

где $u(x) v(x) \Big|_a^b = \exists \lim_{x \rightarrow b-0} u(x) \cdot v(x) - u(a) \cdot v(a)$

Формула справедлива, если хотя бы один из слагаемых сходится. Если оба расходятся, то и интеграл расходится.

6) Интегрирование неравенств
Пусть $f(x), g(x), x \in [a, b), f(x) \leq g(x)$, причем

сходятся интегралы $\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx$. Тогда
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

7) Признаки сходимости и расходимости для непрерывных ф-ий (Признаки сравнения)

Пусть $f(x), g(x) \geq 0$ в $[a, b)$ и интегрируемы в $[a, \xi] \forall \xi < b$; $f(x) \leq g(x)$;

Тогда а) $\int_a^b g(x) dx$ - сходя. $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ - сходя

б) $\int_a^b f(x) dx$ - расходя. $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$ - расходя.

Пусть $g > 0$ и $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

Тогда $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно

В частности, это так, если $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow b-0)$

8) Критерий Коши $f(x), x \in [a, b)$, $f(x)$ непрерывна на $[a, \xi]$ $\forall \xi < b$, $f(x)$ неограничена в $\mathcal{O}(b)$. Тогда сходимость $\int_a^b f(x) dx$ эквивалентна условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta \in [a, b) : \forall \xi_1, \xi_2 \in (\eta, b) \quad \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Равномерность: $\exists \varepsilon_0 > 0, \xi_n, \eta_n \rightarrow b : \left| \int_{\xi_n}^{\eta_n} f(x) dx \right| \geq \varepsilon_0$

9) Абсолютная и условная сходимости

Определение: $\int_a^b f(x) dx$ - абс. сходится, если $\int_a^b |f(x)| dx$ - сход.

Если нет абсолютной сходимости, то сходится условно

10) Достаточные условия сходимости
 $y = f(x) \cdot g(x), x \in [a, b)$ и неограничен в $\mathcal{O}(b)$

Признак Дирихле $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится, если

а) $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченный первообразную на $[a, b)$;

-5-

δ) $g(x)$ непрерывно интегрируема и
 непрерывна на $[a, b)$, причем $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$.

Пример А. Дельд. $\int_a^b f(x)g(x)dx$ - сходится, если

а) $f(x)$ - непрерывна на $[a, b)$, $\int_a^b f(x)dx$ - сходится.

б) $g(x)$ непрерывно интегрируема и
 непрерывна на $[a, b)$.

1.1) Угнетенна в амбала мабаво змевана

Пусть $f(x)$ интегрируема на $(a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b)$
 $\forall \varepsilon > 0$ и непрерывна в $\mathcal{O}(c)$, $c \in (a, b)$.

Определение:
 в.р. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$

в.р. (valeur principal).

Из существования в.р. не следует интегриру-
 емость $f(x)$ на $[a, b)$.

Пример: в.р. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) =$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = 0.$$

Однако не существует $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$.

Задача 1. Вычислить интеграл или показать, что расходится

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int_0^1 \ln x dx$; в) $\int_{-1}^1 f(x) dx$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$

г) $\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение: а) Подынтегральная функция непрерывна в окр. $x=1$ и непрерывна на отрезке $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. По определению несобственного интеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1-0} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1-0} \arcsin \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

б) Подынт. функция непрерывна в $x=0$

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (x \ln x - x) \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon) = -1$$

в) Функция непрерывна слева и справа от 0. Непрерывно отбрасывая бесконечность интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$$

Первый - сходится, второй - расходится,

т.к. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-0} \int_{\varepsilon}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-0} \ln |\varepsilon| = -\infty$

2) Функция определена в Т. $x = -1$.

В точке $x = 1$ она определена, Т.К.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \text{ (Лоптала)} = \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \right) \rightarrow 1$$

Интегрирование:

$$\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow -1+0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow -1+0} - \int_{\varepsilon}^1 \arccos x d \arccos x$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow -1+0} \arccos^2 x \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow -1+0} \arccos^2 \varepsilon = \frac{\pi^2}{2}$$

Задача 2. Интегрирование на бесконечности

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

а) $\alpha \leq 0$. Функция определена, сходится

б) $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1 - \varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1, \text{ сх.} \\ +\infty & \text{если } \alpha > 1, \text{ расх.} \end{cases}$$

в) $\alpha = 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \varepsilon = +\infty$$

расх.

- 8 -

Задана 2. Вывести интегралы $\frac{\pi}{2}$

a) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; б) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$

2) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

Решение: а) Замена переменной: $1-x=t^2, t>0$

$$x=1-t^2, dx=-2t dt$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2 \int_1^0 \frac{t dt}{t(t^2+1)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan t \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

б) интегрирование по частям

$u = \ln x, dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = 2\sqrt{x}$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x \Big|_{0+}^1 - 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2 \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln x \right) - 4\sqrt{x} \Big|_{0+}^1 = -4.$$

в) Числа годемного сходимости. Интегрирование по частям:

$u = \ln \sin x, dv = dx$

$du = \frac{\cos x dx}{\sin x}, v = x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = x \ln \sin x \Big|_{0+}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cot x dx =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln \sin x) - \int_0^{\pi/2} x \cdot \cot x \, dx = -\int_0^{\pi/2} x \cdot \cot x \, dx$$

Öffnen $x \cdot \cot x$ - vereinfachen in $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Zuerst, exogen. Bannum J.

Zaunung $x = 2t$

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t \, dt = 2 \int_0^{\pi/4} \ln(2 \sin t \cos t) \, dt$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t) \, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt +$$

$$+ 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt. \quad \text{B. wir können untere Grenze ändern}$$

Zaunung $t = \frac{\pi}{2} - u$ u. wir können

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u \, du = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin t \, dt$$

B. wir können abschließen:

$$J = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2J \Rightarrow J = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$$

$$2) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad \text{Zaunung: } x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$$

Prüfung untere Grenze: $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$

$$x - a = -a(1 - \cos^2 t) + b \sin^2 t = (b-a) \sin^2 t$$

$$b - x = -a \cos^2 t + b(1 - \sin^2 t) = (b-a) \cos^2 t$$

$$dx = 2(b-a) \sin t \cos t dt$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

Задача 3. Исследование на экстремумы

а) $\int_0^1 \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$; в) $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} dx$

Решение: а) Справедливо неравенство:

$$0 \leq \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} - \text{сход.}$$

Значит, по признаку сравнения сходится

б) $f(x) = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$

Возьмем $g(x) = \frac{1}{1-x}$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}$

При этом $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ - расхож.

Значит, расходится, $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$

в) $\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} - \text{сход.}$
сходится

Задача 4. Исследовать на равномерную и абсолютную сходимость

а) $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin^2 \frac{1}{x} dx$ б) $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$.

Решение. а) Критерии Коши.

Выделим интервал $\omega \in [\frac{1}{2\pi n}, \frac{1}{\pi n}]$, $n \in \mathbb{N}$

Замена: $t = \frac{1}{x}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\left| \int_{\frac{1}{2\pi n}}^{\frac{1}{\pi n}} \frac{1}{x} \sin^2 \frac{1}{x} dx \right| = \left| \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 t}{t} dt \right| \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

Значит, при $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ $\nexists \xi_n = \frac{1}{2\pi n}$, $\eta_n = \frac{1}{\pi n}$

$$\left| \int_{\xi_n}^{\eta_n} f(x) dx \right| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{matrix} \xi_n \rightarrow 0 \\ \eta_n \rightarrow 0 \end{matrix}$$

Следовательно, интеграл расходится

б) Применим признак Дирхле:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \right) \cdot x$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x$$

Репрезентант $F(x) = \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

определен при $x \in (0, 1)$.

$g(x) = x$ — монотонная и $g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$)

Скорее всего сходится.

Условием на абсолютную сходимость:

$\int_0^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx$. Условием не выполняется.

$\frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| \geq \frac{1}{x} \cdot \sin^2 \frac{1}{x}$ и $\int \frac{1}{x} \sin^2 \frac{1}{x} dx$ расх

т.е. нет абсолютной сходимости.
по признаку сравнения.