1к

Мат. Анализ. Семинар № 20

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть $f(x)$ определена при всех $x \geq a$ и интегрируема на $[a,b]$ $\forall b > a$. Если $\exists \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, то он называется несобственным интегралом от $f(x)$ на пром. $[a,+\infty)$

Обозначения: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Говорят: функция интегрируема в несобственном смысле, интеграл сходится. В противном случае не интегрируема, а интеграл расходится.

Все свойства таких интегралов аналогичны свойствам интегралов от неограниченных функций по конечным отрезкам. Кратко напомним:

1) Линейность по промежутку:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx \quad \forall b > a$$

2) Линейность по функции:

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \forall \alpha, \beta$$

3) Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x) \in C[a,+\infty)$, $F(x)$ – первообразная $f(x)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

4) <u>Формула замены переменной</u>

$f(x)\in C[a;+\infty)$; $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\beta \le +\infty$.

$$a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)<\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty.$$

тогда $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

5) <u>Формула интегрирования по частям</u>

$u(x), v(x)\in C^1[a,+\infty)$

$$\int_a^{\infty} u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx,$$

где $$u(x)\cdot v(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty} u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a)$$

6) <u>Интегрирование неравенств</u>

$$f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

7) <u>Признаки сравнения для неотрицательных функций</u>, $0\le f(x)\le g(x)$ $\forall x\ge a$.

а) $\int_a^b g(x)\,dx$ - сходится $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ - расходится

б) $\int_a^b f(x)\,dx$ - расходится $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ - расходится

в) $g(x)>0$ $\exists \lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\Rightarrow$ сходятся и расходятся <u>одновременно</u>

8) <u>Критерий Коши</u>: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\eta>a$

$$\forall \xi_1,\xi_2>\eta \quad \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

9) <u>Абсолютная и условная сходимость</u>

$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ - сходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится

10) <u>Достаточные условия сходимости</u>

$y = f(x)\cdot g(x)$, $x \in [a,+\infty)$,

<u>Признак Дирихле</u> $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ - сходится, если

а) $f(x) \in C[a;+\infty)$, имеет ограниченную <u>первообразную</u>

б) $g(x) \in C^1[a,+\infty)$, монотонна и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

<u>Признак Абеля</u> $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ - сходится, если

а) $f(x) \in C[a,\infty)$; $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится

б) $g(x) \in C^1[a,+\infty)$; монотонна и ограничена

Аналогично определяются интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \quad (\underline{2\ н/предела})$$

10) <u>Интеграл в смысле главного значения</u>

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$$

<u>Пример</u>: $v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} x\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a} = 0.$

Задача 1. Вычислить или установить расходимость.

а) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x\, dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

Решение:

а) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_2^{a} \frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{a\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_2^a =$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{a\to+\infty} \ln \frac{a-1}{a+1} - \ln \frac{1}{3} = \frac{\ln 3}{2}$

б) $\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x\, dx = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^{a} \cos 2x\, dx = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^a =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty} \sin 2a$ не существует. Расходится

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty} = \Bigg| \frac{1}{x^2+4x+9} = \frac{1}{(x+2)^2+5}$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_{-\infty}^{0} + \lim\limits_{a\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^{\infty} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{a+2}{\sqrt{5}} + \lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{a+2}{\sqrt{5}} - \frac{\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

Задача 2. Исследовать на сходимость:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение: а) $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^a =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \frac{a^{-\alpha+1}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1; \text{ сход} \\ +\infty & \text{при } \alpha<1; \text{ расх} \end{cases}$$

$\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \ln x \Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} \ln a = +\infty$$

расходится

б) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Первый сходится только при $\alpha < 1$

Второй сходится только при $\alpha > 1$.

Ответ: Расходится $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Задача 3. Вычислить несобственные интегралы

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, б) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$, в) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

Решение: а) Замена $\sqrt{1+e^x} = t$ $\quad t^2 = 1+e^x$

$$2t\,dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$$

$$x \in (0, +\infty) \Rightarrow t \in [\sqrt{2}, \infty).$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int_{\sqrt2}^{+\infty}\frac{2\,dt}{t^2-1}=\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt2}^{+\infty}=\ln\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1}.$$

б) Замена: $x^2=t$ $\quad(\sqrt2,\infty)\xrightarrow{x\to t}(2,\infty)$

$$\int_{\sqrt2}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}=\frac12\int_2^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)^3}=-\frac14\;\frac{1}{(t+1)^2}\Big|_2^{+\infty}=\frac1{36}$$

в) Замена $x=1/t$, $\quad dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\quad \alpha=1,\beta=0$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\int_1^0\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac12\right)^2+\frac34}}=$$

$$=\ln\left(t+\frac12+\sqrt{t^2+t+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(\frac32+\sqrt3\right)-\ln\frac32=\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt3}\right)$$

Задача 4. Вычислить интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}\,dx.$$

Решение: Интегрирование по частям:

$u=\operatorname{arctg}x$, $\quad dv=\frac{dx}{x^2}$;

$du=\frac{dx}{x^2+1}$, $\quad v=-\frac1x$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}\,dx=-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=$$

$$=\frac\pi4+\int_1^{+\infty}\left(\frac1x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac\pi4+\left(\ln x-\frac12\ln(x^2+1)\right)\Big|_1^{+\infty}=$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

Задача 4 Доказать, что интеграл не зависит от α и вычислить его: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$, $\alpha \geq 0$.

Решение:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} =$$

В первом замена $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = -\int_{\infty}^1 \frac{dt}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)} +$$

$$+ \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_1^{\infty} \frac{t^\alpha\, dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{x^\alpha\, dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 5. Пусть $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ — сходится.

Верно ли, что?

а) $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$; б) $f(x)$ — ограничена при $x \to +\infty$.

Решение: а) Нет. $f(x)=\sin x^2$

Замена $x^2=t$, $x=\sqrt{t}$ $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\right)$$

Интеграл $\int_0^1\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ сходится, т.к $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}<\frac{t}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}$

(признак сравнения)

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ Сходится по Дирихле:

$f(t)=\sin t$, $F(t)=-\cos t$ – огр.

$g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ – монотонн, $g(t)\to 0$ $(t\to\infty)$.

б) Нет. $f(x)=x\cdot\sin x^4$; $x^2=t$, $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\int_0^{\infty}x\cdot\sin x^4\,dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\sin t^2\,dt \text{ – сходится (п. а)}$$

Задача 6. Исследовать на сходимость:

а) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; б) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$; в) $\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^3+\sin x}$

Решение: а) признак сравнения

$0\le\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\le\frac{1}{x^{4/3}}$, $\alpha=\frac{4}{3}>1$.

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{4/3}}$ Сходится б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Пр. сравнения

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{\ln x}{x}}} = \frac{1}{2}$$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - расходится $\Rightarrow$ Расходится

в) $\frac{x}{x^3+\sin x} \sim \frac{1}{x^2}$ $(x\to+\infty)$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ - сходится

Ответ: сходится

<u>Задача 7</u>. Доказать расходимость интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \quad \text{при } \alpha \le 1.$$

<u>Решение</u>: Критерий Коши.

Рассмотрим $\xi_n = \pi n$, $\eta_n = 2\pi n$.

$$\left|\int\limits_{\xi_n}^{\eta_n} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx\right| \geq \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \geq \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4} = \varepsilon_0 > 0.$$

$\xi_n, \eta_n \to +\infty$. Расходится

<u>Задача 8</u>. Доказать, что сходится <u>условно</u> интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение: интегрируем по частям:

$u = \frac{1}{x}$, $dv = \sin x\,dx \Rightarrow du = -\frac{dx}{x^2}$, $v = -\cos x$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Сходится по признаку сравн.: $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$.

Проверим, что нет абсолютной сходимости:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = +\infty. \text{ (Зад 7)}$$

По признаку сравнения расходится

Задача 9. Доказать, что при $\alpha > 0$ интеграл сходится:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} \cdot \operatorname{arctg} x\,dx$$

Решение: Положим $f(x) = \frac{\sin x}{x^{\alpha}}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$

Воспользуемся признаком Абеля:

а) $f(x) \in C[1, +\infty)$, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx$ сходится

по признаку Дирихле при $\forall \alpha > 0$

б) $g'(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$, т.е. $g(x)$ - монотонна и ограничена

Значит, инт. сходится

Задача 10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x} - \sin x}$.

Решение:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 - \sin x/\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + R(x)\right) =$$

где $|R(x)| \le \frac{C}{x}$ $(x \to +\infty)$.

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + R_1(x), \quad |R_1(x)| \le \frac{C}{x\sqrt{x}}.$$

Тогда $\int_1^{\infty} R_1(x)\,dx$ – абсолютно сходится.

Значит, характер сходимости инт. I зависит от сходимости инт

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x}\right) dx,$$

который расходится, т.к. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ – сходится, (Дирихле)

а $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$ – расходится (задача 7, $\alpha = 1$)