Мат. Анализ Семинар №21

Собственные интегралы, зависящие от параметра

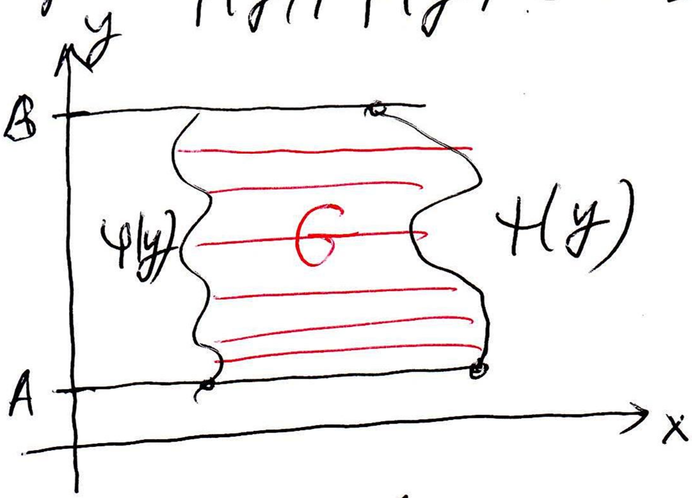
Пусть $\forall y \in E \subseteq \mathbb{R}$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману по $x \in [a,b]$:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

называемые **собственными интегралами, зависящими от параметра** $y \in E$. Аналогично

(1) $$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

где $\varphi(y), \psi(y) \in C[A,B]$, $f \in C(\overline{G})$



Здесь: $\varphi(y) \le \psi(y)$, $y \in [A,B]$.

$\forall y \in [A,B]$ $f(x,y)$ — инт. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

① Непрерывность интеграла по параметру

Пусть $f(x,y) \in C(\overline{G})$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[A,B]$

Тогда $\Phi(y) \in C[A,B]$. В частности:

$$\lim_{y \to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dy = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)\,dx$$

Возможен предельный переход под зн. интеграла

Задача 1. Найти интегралы:

а) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$; б) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$; в) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{1}^{2}(2x-1)\cos xy\,dx$

Решение:

а) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx=\frac{x\cdot|x|}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

б) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2+y^2}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{4}$

в) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{1}^{2}(2x-1)\cos xy\,dx=\int_{1}^{2}(2x-1)\,dx=x^2-x\Big|_{1}^{2}=2$

Задача 2. Найти интегралы.

а) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-1}^{1+y}\sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx=1$

б) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{y}^{1-y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

в) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{1+y^2}^{2-\sin y}(2x-1)\cos xy\,dx=\int_{1}^{2}(2x-1)\,dx=2$

② Интегрирование интегралов, зависящих от параметра.

$f\in C(G)$, $G=[a,b]\times[A,B]$

$f(x,y)$, $x\in[a,b]$, $y\in[A,B]$

$$\int_A^B \Phi(y)\,dy = \int_A^B \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_A^B f(x,y)\,dy\,dx$$

(теорема Фубини).

③ <u>Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра</u>

Пусть $\varphi(y), \psi(y) \in C^1[A,B]$.

$\exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(\bar{G})$ Тогда

$\Phi(y) \in C^1[A,B]$,

а) $\varphi(y) \equiv a$, $\psi(y) \equiv b$,

$$\Phi'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

б) <u>Общий случай</u>: $\Phi(y) \in C^1[A,B]$

$$\Phi'(y) = \frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dy = f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y) -$$

$$- f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

<u>Задача 3.</u> Показать, что в этом интеграле <u>нельзя</u> менять lim и интеграл:

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx$$

$f(x,y)=\frac{x}{y^2}\,e^{-\frac{x^2}{y^2}}$, в т. $(0,0)$

$\forall x>0$ $\quad \boxed{\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}=0}$

При $y=x$ $\quad f(x,x)=\frac{1}{x}\to\infty \ (x\to0+)$.

Нет непрерывности в т. $(0,0)$.

Найдем $(y\neq0)$. $\quad \lim\limits_{y\to0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=$

$$=\lim_{y\to0}\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}d\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{y\to0}\left(-e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to0}\left(1-e^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2}$$

При этом $\quad \int_0^1\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\,dx=\int_0^1 0\cdot dx=0\neq\frac{1}{2}$

<u>Задача 4.</u> Вычислить интеграл

$$I=\int_0^1\frac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1}}{\ln x}dx \qquad 0<\alpha_1\le\alpha_2$$

<u>Решение:</u> явно не считается! Сведем к повторному интегралу. Введем функцию $f(x,y)=x^y$, где $y\in[0,1]$ – параметр.

Тогда $\quad \frac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1}}{\ln x}=\frac{x^y}{\ln x}\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}x^y\,dy$

$$I=\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^y\,dy\,dx=$$

$$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\int_0^1 x^y\,dx\right)dy=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\right)dy=$$

$$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{dy}{y+1}=\ln(1+y)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}=\ln\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}.$$

Задача 5. Найти $I'(y)$, $I(y)=\int_1^2 \frac{e^{yx^2}}{x}\,dx$

Решение: По формуле дифференцирования:

$$I'(y)=\int_1^2 \frac{x^2\cdot e^{yx^2}}{x}\,dx=\frac{e^{yx^2}}{2y}\Big|_1^2=\frac{e^{4y}-e^{y}}{2y}$$

Задача 6. Вычислить интеграл

$$I(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2 x+y^2\cos^2 x)\,dx,\ y\neq 0$$

Решение: $I(1)=0$, пусть $y\neq 1$.

$f(x,y)=\ln(\sin^2 x+y^2\cos^2 x)$

непрерывна в $G=\{(x,y),\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ y_1\le y\le y_2\}$ где $y_1>0$.

и $\exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y\cos^2 x}{\sin^2 x+y^2\cos^2 x}$ в $\overline{G}$

Найдем $I'(y)$: Замена $t = tg\, x$

(*) $I'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y \cos^2 x}{\sin^2 x + y^2 \cos^2 x}\, dx = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(tg\, x)}{(tg^2 x + y^2)(tg^2 x + 1)}$

$y > 0$

$= \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+y^2)} = \frac{2y}{y^2-1} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+y^2} \right) dt =$

$= \frac{2y}{y^2-1} \left(arctg\, t - \frac{1}{y} arctg \frac{t}{y} \right) \Big|_0^{\infty} =$

$= \frac{2y}{y^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2y} \right) = \frac{\pi}{y+1}$

$I(y)$ четная функция $I(y) = I(-y)$ тогда

$$I'(y) = \frac{\pi}{|y|+1} \quad \text{при } y \neq 0.$$

Тогда при $y > 0$ $\quad I(y) = \pi \ln(y+1) + \underline{\underline{C}}$

Найдем константу C: $I(1) = 0 \Rightarrow C = -\pi \ln 2$

Значит: $I(y) = \pi \cdot \ln\left(\frac{y+1}{2}\right)$ при $y > 0$.

Тогда $I(y) = \pi \cdot \ln\left(\frac{|y|+1}{2}\right)$ при $y \neq 0$.

Очевидно, что $I'_л(0) = \frac{\pi}{2}$, $I_п(0) = -\frac{\pi}{2}$.

т.е. в т. $y = 0$ нет производной.

А по формуле (*): $I'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx = 0$..

Задача 7. Доказать, что ф-ия $u(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ является решением дифференциального ур-я:

$u''(x)=f(x)$, при начальных условиях:

$u(0)=0$, $u'(0)=0$

Решение: Дифференцируем по параметру:

$$u'(x)=(x-x)\cdot f(x)+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x f(t)dt.$$

$u''(x)=f(x)$. Проверяем начальные условия:

$u(0)=0$, $u'(0)=0$ очевидно

Задача 8. (обобщение) Доказать, что ф-ия

$$u(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt.$$ явл. решением

$u^{(n)}(x)=f(x)$, и начальным условиям

$u(0)=u'(0)=\ldots=u^{(n-1)}(0)=0$

Решение: $u(0)=0$ очевидно

$$u'(x)=\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}\cdot f(x)+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (n-1)(x-t)^{n-2}f(t)dt=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f(t)dt$$

Далее по индукции: при $n=1,2$ верно

Шаг: $u'(x)$ - реш. ур-я $(u')^{(n-1)}=f(x)$.

Получим формулу n-кратного с нулевыми нач. усл.

Задача 9. Функция $u(x)=\int_0^x (x-t)e^{x-t}f(t)\,dt$ является решением:

$$u''-2u'+u=f(x),\quad u(0)=0,\ u'(0)=0.$$

Решение: дифференцируем

$$u(0)=0,\quad u'(x)=\int_0^x (x-t+1)e^{x-t}f(t)\,dt$$

$$u'(0)=0,\quad u''(x)=f(x)+\int_0^x (x-t+2)e^{x-t}f(t)\,dt=$$

$$=\int_0^x \left[2(x-t+1)-(x-t)\right]f(t)\,dt+f(x)=2u'(x)-u(x)+f(x)$$

т.е. $u''(x)-2u'(x)+u(x)=f(x)$

Задача 10. Функция $u(x)=\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt$ является решением:

$$u''+u=f(x),\quad u(0)=u'(0)=0.$$

Решение:

$$u(0)=0,\quad u'(x)=\sin(x-x)f(x)+\int_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt=$$

$$=\int_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt.$$

$$u'(0)=0,\quad u''(x)=\cos(x-x)f(x)-\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt$$

$$=f(x)-u(x)$$

т.е. $u''(x)+u(x)=f(x)$

<u>Задача 11.</u> С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx.$$

<u>Решение:</u> $I(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{y}\right)$

Найдем производную двумя способами:

$$I'(y) = -2y\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} \quad \Bigg| \quad I'(y) = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y^3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}$$

Следовательно

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2y^3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2y^2(1+y^2)}$$