

1K

Мат. Анализ. Семинар №22Равномерная сходимость неопределенных
интегралов, зависящих от параметра① Определение равномерной сходимости

Рассмотрим неопределенные интегралы

$$\text{Вид: (1) } \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx, \quad \alpha \in E.$$

Предполагается, что интеграл сходится $\forall \alpha \in E$ Определение. Интеграл (1) сходится равномернона E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall \xi > M$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon$$

$$\text{или эквивалентно } F(M, \alpha) = \int_a^M f(x, \alpha) dx$$

Интеграл сходится равномерно $\forall \alpha \in E$ если $M \rightarrow +\infty$

$$\int_a^M f(x, \alpha) dx \xrightarrow{\alpha \in E} \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx$$

Интеграл (1) сходится неравномерно на E ,если $\exists \varepsilon_0 \exists M_n \rightarrow \infty, \exists \alpha_n \in E$:

$$\left| \int_{M_n}^{+\infty} f(x, \alpha_n) dx \right| > \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Из определения вытекает критерий равномерной сходимости интеграла (1)

$$\left| \sup_{\alpha \in E} \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \right| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0).$$

Проверка условия. Проверка равномерности

② Признак Вейерштрасса равномерной сходимости: $\exists \varphi(x) \geq 0, x \in [a, +\infty)$:
 $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq a, \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ — сходится

тогда интеграл (4) сходится абсолютно и равномерно на E .

③ Признак Дирхле равномерной сходимости. Условие Дирихле

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha) \cdot g(x, \alpha) dx, \quad \alpha \in E,$$

сходится равномерно по $\alpha \in E$, если $\forall \alpha \in E$ функции $f(x, \alpha), g(x, \alpha); g'_x(x, \alpha) \in C[a, +\infty)$.
 и выполняются условия:

1) $g(x, \alpha) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (равномерно на E)

2) $g'_x(x, \alpha)$ не имеет знака на $[a, +\infty)$

3) $f(x, \alpha)$ имеет ограниченную вариацию, т. е. $\exists M > 0$:

$$\left| \int_a^x f(y, \alpha) dy \right| \leq M \quad \forall x \in [a, +\infty), \quad \forall \alpha \in E.$$

④ Критерии Коши равномерной сходимости. Интервал (1) сходится равномерно на $E \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) : \forall x \in E$
 $\forall \xi_1, \xi_2 \geq M \quad \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon$.

Несходящийся, (1) не сходится равномерно, если
 $\exists \varepsilon_0 > 0 \exists \xi_n \rightarrow +\infty, \eta_n \rightarrow +\infty, \alpha_n \in E :$
 $\left| \int_{\xi_n}^{\eta_n} f(x, \alpha_n) dx \right| \geq \varepsilon_0$.

⑤ Независимость равномерной сходимости от выбора интервала.

Пусть задана $f(x, \alpha)$ независимая на измеримой $D = \{(x, \alpha) : 0 \leq x < +\infty, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$ и интервал $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx$ сходится

равномерно на $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] = E$.

Тогда $I(\alpha), \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ — независимая функция.

Задача 1. Докажем, что $\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$

- а) сходится равномерно при $E = [b, +\infty)$, $b > 0$.
 б) сходится неравномерно при $E_0 = (0, +\infty)$.

Решение: а) Пусть $\xi > 0$, $\alpha \geq b > 0$. Тогда

$$\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \Big|_{\xi}^{+\infty} = \frac{e^{-\alpha \xi}}{\alpha}, \text{ т.е.}$$

$$\forall \alpha \geq b \quad \left| \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \right| \leq \frac{e^{-b\xi}}{b} < \varepsilon, \text{ если}$$

$$\xi > \left(\frac{1}{b}\right) \ln\left(\frac{1}{\varepsilon b}\right) = M_{\varepsilon}. \quad \text{Значит}$$

$$\left| \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \right| < \varepsilon \quad \forall \xi \geq M_{\varepsilon}, \quad \forall \alpha \in E = [b, +\infty)$$

т.е. $e^{-\alpha x}$ равномерно сходится

б) На $E_0 = (0, +\infty)$ нет равномерно сходимости

Рассмотрим $M_n = 1 + n \rightarrow +\infty$, $\alpha_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \in E_0$

$$\int_{M_n}^{+\infty} e^{\alpha_n x} dx = \frac{e^{-\alpha_n M_n}}{\alpha_n} = e^{-1} (n+1) \geq e^{-1} = \varepsilon_0.$$

Задача 2. Исследовать $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, сходимость
 и расхождение на $E = (1, +\infty)$.

Решение: Сходимость есть при $\alpha > 1$.

При этом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{\sum^{1-\alpha}}{\alpha-1}$

Положим: $\sum_n = n$ $\alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$

Тогда $\sum_n^{1-\alpha_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_n}} = \frac{n}{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$

Значит, есть расхождение сходимости.

Задача 3. Исследовать на расхождение
 сходимость интеграл Дирихле:

$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ а) $\alpha \geq b > 0$
 б) $\alpha > 0$.

Решение: делаем замену $x = y$:

$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{dy}{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = I(\alpha)$

Не забываем $0 < \alpha$! Сходимость по Дирихле
 (не расхождение)

Задача 4. Исследовать на равномерную сходимость с помощью признака Вейерштрасса

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{1+x^2} dx, E = \mathbb{R};$

b) $\int_3^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}} dx, E = [0, 2]$

Решение: a) $\left| \frac{\sin 2x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$

$\varphi(x)$ - суммируемая функция: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \infty$

применяем признак Вейерштрасса

b) $\alpha \in [0, 2], x \in [3, \infty), 0 \leq \ln^2 x \leq \ln^2 x$

т.е. $\frac{\ln^2 x}{x^{5/4}} \leq \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}} \leq \frac{C x^{\epsilon}}{x^{5/4}}, \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/4-\epsilon}} < \infty$

Задача 5. Исследовать равномерную сходимость

$\int_0^{\infty} \frac{\alpha \cdot \sin \alpha x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \alpha \in [0, 1] = \bar{E}$

Решение: применяем признак Дирхле:

$f(x, \alpha) = \alpha \cdot \sin \alpha x, g(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f, g, f_x - непрерывны, $g(x, \alpha) \xrightarrow{\alpha} 0 (x \rightarrow \infty)$
(не зависит от α)
монотонно

Оценим в неравенстве:

$$\left| \int_0^x f(y, \alpha) dy \right| = \left| \int_0^x \alpha \sin y dy \right| = |1 - \cos \alpha x| \leq 2$$

Согласно, полученное соотношение

Задача 6. Доказать полноту функции в $E = [0, \infty)$

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha^2 \cos \alpha x}{x + \alpha^2} dx$$

Решение: $f(x, \alpha) = \alpha \cdot \cos \alpha x$, $g(x, \alpha) = \frac{\alpha}{x + \alpha^2}$

1) $g(x, \alpha)$ — убывает на $[1, \infty)$ $\forall \alpha \geq 0$.

$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{т.к. } x + \alpha^2 \geq 2\alpha\sqrt{x})$$

т.е. $g(x) \rightarrow 0$ равномерно по $\alpha \in [0, \infty)$.

$$2) \left| \int_0^x f(y, \alpha) dy \right| = \left| \int_0^x \alpha \cos y dy \right| = |\sin \alpha x| \leq 1.$$

Значит, это полноту функцию

Задача 7. Доказать равномерность по α :

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}, \quad \alpha > 2.$$

Решение: $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим $E_\varepsilon = \{\alpha \geq 2 + \varepsilon\}$

При $\alpha = 2$ не выполняется.

- 9 -

Тогда $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+x^{2+\varepsilon}} = \varphi(x).$

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^{2+\varepsilon}} < \infty. \quad \text{т.к.} \quad \frac{x}{1+x^{2+\varepsilon}} < \frac{2}{1+x^{1+\varepsilon}}$$

Его первообразная
существует во всяком промежутке

$$x+x^{2+\varepsilon} < 2+2x^{2+\varepsilon}$$

$$(x-2 \leq x^{2+\varepsilon}) \quad \forall x \geq 0.$$

по известной Лемме

Тогда $I(x) \in C[2+\varepsilon, \infty) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow I(x) \in C(2, +\infty).$

~~еще один способ доказать существование первообразной~~

Задача 8 Исследовать на первообразную
существование: $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+x^2)} \sin x \, dx, x \in \mathbb{R}$

Решение: $I(0) = 0$, очевидно

Делаем замену $t = |x| \cdot x, x \neq 0$

получаем:

$$I(x) = e^{-x^2} \sin x \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt = C \cdot \frac{e^{-x^2} \sin x}{|x|},$$

где $C = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt > 0.$

Заметим, что $\lim_{x \rightarrow 0-0} I(x) = -C$

$\lim_{x \rightarrow 0+0} I(x) = C$. т.е. $I(x)$ разрывен в нуле!

Пограничные значения функции не определены.
Следовательно, нет табличных значений.

Задача 9. Исследовать на равномерную

сходимость $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0, 2)$

Решение: Заменим $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}} dt$$

Исследуем во всем t в интеграле:

$$\int_B^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}} dt = \frac{\cos B}{B^{2-\alpha}} + (2-\alpha) \cdot \int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-\alpha}} dt$$

Покажем, что интеграл сходится равномерно

по B . Попробуем: $\frac{1}{t^{3-\alpha}} < \frac{1}{t} \rightarrow 0$, монотонно и

непрерывно $\left| \int_a^x \cos t dt \right| = |\sin x - \sin a|$ - ограничено.

Поэтому, для B - достаточно, что $\left| \int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-\alpha}} dt \right| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Ограничим $\frac{\cos B}{B^{2-\alpha}}$ тем же ε для B достаточно

11

угодно малыми при всех достаточно
 больших $b \geq B$, равносильно во всем $\alpha \in (0, 2)$.
 Действительно, пусть $B > 0$ задано. Пусть,
 кроме того, $0 \leq \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2}$. Тогда, выбирая
 число $b = 2k\pi > B$, $k \in \mathbb{N}$, значение пере-
 менной α из неравенства

$$0 < 2 - \alpha < \frac{\ln^{-1} \varepsilon_2}{\ln 2k\pi}, \quad \text{выполним}$$

$$\left| \frac{\cos b}{b^{2-\alpha}} \right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-\alpha}} > \varepsilon_2.$$

Сферически, несферически и т.д. и
 сходится неравномерно.

Заметим, что сходимость (неравномерная)
 следует из признака Дирхле.
