

Несобственные интегралы, зависящие от параметра① Дифференцирование по параметруПусть заданы $f(x, \alpha)$ и $f'_\alpha(x, \alpha)$

непрерывные на множестве

$$G = \{ (x, \alpha), x \in [0, +\infty), \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \}$$

и при этом интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \quad \text{сходится } \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

а интеграл

$$\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx \quad \text{сходится равномерно } \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

Тогда $I(\alpha) \in C^1[\alpha_1, \alpha_2]$ и справедливо

правильное равенство: $I'(\alpha) = \int_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx.$

Примеры из прямого семинера:

Пример 1. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx, \alpha \in (0, \infty) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Сходится $\forall \alpha$. По дифференцируемому формуле:

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx, \text{ сходится равномерно при } \alpha > b > 0$$

Уменьшить параметр $x \cdot e^{-2x} \leq x \cdot e^{-bx}$, $\int_0^{\infty} x e^{-bx} dx < \infty$

Тогда: $I'(\alpha) = - \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha^2} \quad (\alpha > 0)$

Пример 2. $I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$; $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$

$I'(\alpha) \sim - \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ сходится равномерно
при $\alpha \geq 1 + \varepsilon$

Есть неравенство: $\frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{\ln x}{x^{1+\varepsilon}}$; $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{1+\varepsilon}} dx < \infty$

Вывод: $I'(\alpha) = - \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$, $\alpha > 1$.

Пример 3. $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, сходится
 $\forall \alpha > 0$.

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ (Рокрасселл интеграл)

$I'(\alpha) \sim \int_0^{\infty} \cos \alpha x dx$ - расходится

Нельзя дифференцировать по параметру
Действительно.

② Интерпретация по параметру.

Функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в $G = [a, +\infty) \times [\alpha_1, \alpha_2]$

и интеграл $I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx$ равномерно

сходится на $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Тогда $I(\alpha) \in C[\alpha_1, \alpha_2]$

и можно считать вполне определенно:

$$(1) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx d\alpha = \int_a^{+\infty} \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx$$

Равенство (1) остается справедливым при замене свойств непрерывности (α_1, α_2) на условия: $f(x, \alpha) \geq 0 \quad \forall (x, \alpha) \in G$ существующий интеграл абсолютно непрерывно зависит от параметра $x \in [a, +\infty)$ и сходится равномерно. Равенство имеет смысл (конечный).

Если $f(x, \alpha)$ непрерывна на множестве $\tilde{G} = \{(x, \alpha), x \in [a, +\infty), \alpha \in [c, +\infty)\}$, а интегралы $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx, \int_c^{+\infty} f(x, \alpha) d\alpha$

сходятся равномерно и, кроме того,

-4-

свойствах интеграла и неравенствах

$$\int_c^a \left(\int_a^{+\infty} |f(x, z)| dx \right) dz \text{ или } \int_c^a \left(\int_a^{+\infty} |f(x, z)| dz \right) dx$$

тогда свойства и все неравенства интегрирования
от функции $f(x, z)$ (без изменений)
и справедливы.

$$\int_c^a \left(\int_a^{+\infty} f(x, z) dx \right) dz = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^a f(x, z) dz \right) dx$$

Получаем интегралы:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} ; (*)$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} . (**)$$

Задача 1. Вычислить интеграл Дуфурье

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \alpha \geq 0.$$

Решение: Рассмотрим интеграл

$$(2) \quad \phi(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \beta > 0.$$

$\forall \beta > 0$ интеграл сходится по теореме
Дирхле, т.к. $\frac{1}{x} e^{-\beta x}$ убывает на $(0, +\infty)$ и
стремится к нулю, а функция $\frac{\sin \alpha x}{x}$ имеет
ограниченную непрерывную: $\int \sin \alpha x dx = \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha}$.

При $\alpha = 0$ интеграл равен нулю, $\Phi(0, \beta) = 0$.
Кроме того, интеграл

$$K(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx,$$

по теореме из (2) непрерывно по α
сходится равномерно по $\alpha \in \mathbb{R}$ по теореме
Вейерштрасса. Используем правило
Лейбница и получим более интересный интеграл (*)

$$\Phi'_\alpha(\alpha, \beta) = K(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \sin \alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Интегрируем по α на $[0, \alpha]$ получим:

$$\Phi(\alpha, \beta) - \Phi(0, \beta) = \beta \int_0^\alpha \frac{dt}{t^2 + \beta^2} = \arctg \frac{\alpha}{\beta}$$

Поскольку $\Phi(0, \beta) = 0$, получаем:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \arctg \frac{\alpha}{\beta}, \quad \forall \beta > 0, \text{ т.е.}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \arctg \frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta > 0.$$

Вывести интеграл Дирихле.

Зафиксируем α . Интеграл $\Phi(\alpha, \beta)$ сходится равномерно по $\beta \in [0, 1]$, т.к. функция $\sin \alpha x$ имеет ограниченную первообразную, а функция $g(x) = \frac{e^{-\beta x}}{x}$ монотонно убывает ($g'(x) < 0$ при $x > 0, \beta \geq 0$) и $g(x, \beta) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на отрезке $[0, 1]$.

Применим интеграл Дирихле к интегралу. Следовательно, из равномерной сходимости, в силу непрерывности функции $e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ на отрезке $G = \{(\alpha, \beta) : x \in [0, \infty), 0 \leq \beta \leq 1\}$,

функция $\Phi(\alpha, \beta)$ непрерывна по $\beta \in [0, 1]$, и, в частности, непрерывна при $\beta = 0$. Следовательно, в пределе $\Phi(\alpha, \beta)$ можно перейти к интегралу при $\beta \rightarrow 0+$, т.е.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \arctan \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

Отсюда:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ при } \alpha > 0.$$

Задача 2. Вычислить интеграл Лапласа:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$$

Решение. Пусть $\alpha > 0$. Функция $\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непериодична по α и x , а поэтому не интегрируема по α .

Итак $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$

Согласно лемме Фрумане в $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 > 0$.

(Признак Дирихле, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \sin \alpha x$).

Аналогично, по правилу Лейбница

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$$

Применяя к этому равенству такое же правило,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \quad \alpha > 0$$

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1+x^2)x} dx$$

Дифференцируя по α последнее равенство:

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

(по теореме, в силу которой сходимость ряда равномерна).

Аналогом, $I(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$I''(x) - I(x) = 0$$

Общее решение имеет вид:

$$I(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

Заметим, что

$$|I(x)| \leq I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Однако, $e^x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$).

Поэтому $C_1 = 0$, т.е.

$$I(x) = C_2 \cdot e^{-x}$$

Подставим $x=0$, $I(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{2}$

Заметим, что $I(x)$ — четная функция.

В итоге $I(x) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

Заметим, что $I(x) = -K(x)$, значит

$$K(x) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right)' = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}, \quad x > 0$$

т.е. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$

Функция $K(x)$ — нечетная, т.е.,

$$K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sin \alpha x \cdot e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- 9 -

Задача 3. Вычислить интеграл Пуассона

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Решение: Положим $x = yt$, где $t > 0$.
(t — фиксированный параметр)

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} t dy, \text{ т.е.}$$

$$I \cdot e^{-t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(y^2+1)t^2} t dy$$

Умножившем обе части на $t \in [0, +\infty)$

$$I \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(y^2+1)t^2} t dy \right) dt = K$$

Левая часть есть I^2 . Легко увидеть,
изменив порядок интегрирования.

$$K = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{t^2(y^2+1)} t dt \right) dy$$

Значит:

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2(y^2+1)} t dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)} \frac{d(1+y^2)t^2}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{2(1+y^2)} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2(1+y^2)} \cdot -e^{-u} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2(1+y^2)}$$

Аналогично,

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, $I^2 = K = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Отсюда: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Задача 4 Вычислить интеграл Лапласа

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx$$

Решение! Дифференцируем по α :

$$I'(\alpha) = -2 \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} \sin 2\alpha x dx$$

(Заметим, т.к. интеграл сходится во всех точках)

интегрируем по частям:

$$I'(\alpha) = \underbrace{e^{-x^2} \sin 2\alpha x}_{=0} \Big|_0^{+\infty} - 2\alpha \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx$$

Аналогично $I'(\alpha) = -2\alpha \cdot I(\alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dI(\alpha)}{I(\alpha)} = -2\alpha d\alpha. \text{ Отсюда}$$

$$I(\alpha) = C \cdot e^{-\alpha^2}$$

При $\alpha = 0$ $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Отсюда: $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\alpha^2}$

Задача 5. Вычислить интегралы Френеля:

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

Решение: Замена $x^2 = t, t \geq 0$.

(2) $I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ (сходится по Дирхле)

при $t > 0$ справедливо равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t u^2} du.$$

(сделаю замену $\sqrt{t} u = x$ и воспользуюсь тем, что $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Справедливо, из (2)

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\sin t \int_0^{+\infty} e^{-t u^2} du \right) dt \quad (3)$$

Меняю порядок интегрирования:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t u^2} \sin t dt \right) du$$

Нужно дать оценку (**)

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} \quad (4) \text{ Найдём этот интеграл:}$$

Заметим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right) dx}{1+(1/x)^4} = - \int_{+\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Поэтому

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1+\frac{1}{x^2}) dx}{x^2 + (1/x)^2} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Отсюда $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4. Для обоснования законности перестановки порядка интегрирования в (3) воспользуемся теоремой:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2^2 t} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-2^2 t} \cdot \sin t \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t u^2} du \right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2 + 2^2)} \sin t dt \right) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2+2^2)^2}. \end{aligned}$$

Здесь (**)!

Здесь снова имеем математическое
задание! Делая приближенный переход
при $\alpha \rightarrow 0$, то задание в нас будет
использоваться следующим образом,
используем: (4), т.е.

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}, \text{ из которого следует}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Аналогично получаем, что

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
