1к

Мат. Анализ. Семинар № 24.

Дифференцирование функций многих переменных. Дифференциал 1-го рода

① **Частные производные:**

Функция $f(x,y)$ задана в $O(x_0,y_0)$, $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

Если существуют пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x};\ \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

то они называются <u>частными производными</u> функции f в точке (x_0,y_0) по переменным x и y, соответственно. Обозначаются:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=f_x(x_0,y_0);\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=f_y(x_0,y_0)$$

Если частные производные ф-ии f существуют в каждой точке мн-ва $E\subset\mathbb{R}^2$, то говорят: f <u>имеет частные производные на E</u>

Аналогично определяются частные производные функции трех и более переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,..,x_n)=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,..,x_k+\Delta x_k,..x_n)-f(x_1,..,x_k,..x_n)}{\Delta x_k}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k=1,..,n$ называются <u>производными 1-го порядка</u>.

Для вычисления частных производных используем обычные правила дифферен-цирования, например, суммы, произведения, частного и т. п. При этом все переменные, кроме x_k считаются фиксированными параметрами.

---

② Дифференцируемость функции в точке

$f(x, y)$ дифференцируема в т. (x_0, y_0), если $\exists$ числа A и B, такие что

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Линейную функцию переменных Δx и Δy

$$A\Delta x + B\Delta y$$

называют (первым) дифференциалом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и обозначают

$$df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

Принято писать $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, т.е.

$$df(x_0, y_0) = A\,dx + B\,dy$$

Следовательно $df(x_0, y_0)$ – главная часть приращения $\Delta f(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$

Если $f(x,y)$ дифференцируема в каждой точке мн-ва $E \subset \mathbb{R}^2$, то говорят, что ф-ия $f(x,y)$ дифференцируема на мн-ве E.

Аналогично определяется понятие дифференцируемой функции 3х и более перемен.

Теорема 1. (Необходимое условие диффер.)

Если $f(x,y)$ дифференцируема в т. (x_0, y_0) и $df(x_0,y_0) = A dx + B dy$ – её дифференциал в т. (x_0,y_0), то $\exists$ частные производные f в т. (x_0, y_0), причем

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B.$$

Следовательно: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$ (1)

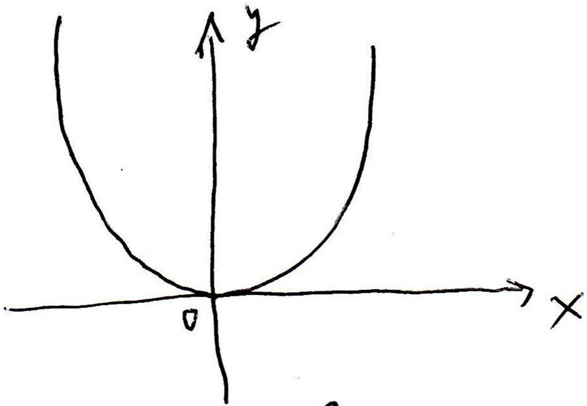
Формула (1) обобщается на n-переменных: $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Утверждение 1. Если ф-я $f(x,y)$ дифференцируема в т. (x_0,y_0), то она непрерывна в этой точке

Утверждение, обратное к Теореме 1, <u>не верно</u>

<u>Пример 1.</u> $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, \ x \neq 0 \\ 0 & \text{в ост. точках} \end{cases}$



$f_x(0,0) = 0$

$f_y(0,0) = 0$.

Однако, f — не дифференцируема (нет непрерывности!)

Можно <u>непрерывную</u>: $f(x,y) = \begin{cases} x, & y = x^2, \ x \neq 0 \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases}$

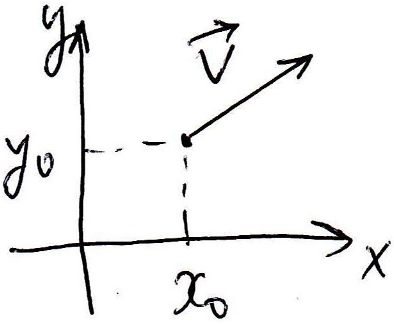
Действительно: $(x_0, y_0) = (0,0)$.

$\Delta f = \Delta x \neq o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$, т.к. $\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \not\to 0$ $\quad (\Delta x, \Delta y) \to 0$

<u>Теорема 2.</u> (Достаточное условие дифференц.)
Для дифференцируемости функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в некоторой точке, <u>достаточно</u> чтобы частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ <u>существовали</u> в окрестности этой точки и были <u>непрерывны</u> в этой точке.

Функция, у которой частные производные непрерывны на мн-ве E, называется непрерывно дифференцируемой на E.

③ Производная по направлению.



$\vec v = (v_1, v_2)$, $f(x,y)$.

$$\varphi(t) = f(x_0+v_1 t,\ y_0+v_2 t).$$

прямая: $(x_0+v_1 t,\ y_0+v_2 t)$.

Определение: $\frac{df}{dv}(x_0,y_0) = \varphi'(t)\Big|_{t=0} = \varphi'(0)$.

Теорема 3. Если функция f дифференцируема в т. (x_0, y_0), то $\forall\, v \in \mathbb{R}^2$

$$\exists\ \frac{df}{dv} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot v_2$$

Пример 1. Функция $f(x,y)$ – дифференцируема по $\forall$ направлению v, $\frac{df}{dv} = 0$ $\forall\, v$ в т. $(0,0)$.
При этом ф-ия не дифференцируема.

Определение: градиент функции f

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Аналогично: $\nabla f(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Производная по направлению:

$$\frac{df}{dv} = (\nabla f, v)$$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$).

Пример 2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Тогда $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, т.к. $f(0,y) = f(x,0) \equiv 0$.

При этом $\varphi(t) = f(tv_1, tv_2) = \dfrac{v_1 \cdot v_2}{v_1^2 + v_2^2} = const$

т.е. $\dfrac{df}{dv} = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

Функция $f(x,y)$ – разрывна в т. $(0,0)$.

т.к. при $x=y$ $f(x,y) = \frac{1}{2}$, $x \neq y$.

Задача 1. Найти частные производные и df

а) $f(x,y) = x + y^2 + \ln(x+y^2)$, б) $f(x_1, \dots, x_n) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Решение а) $f_x = 1 + \dfrac{1}{x+y^2}$, $f_y = 2y + \dfrac{2y}{x+y^2}$

Функция опред. при $y^2 > x$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(1 + \frac{1}{x+y^2}\right) dx + \left(2y + \frac{2y}{x+y^2}\right) dy$$

б) $f_{x_k} = \dfrac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \dfrac{x_k}{|x|}$, $x \neq 0$.

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k \, dx_k}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Задача 2. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y)$, если:

а) $f(x,y)=\sqrt[3]{|xy|}$ б) $f(x,y)=\cos\sqrt[3]{|xy|}$

в) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(5+|x|^{4/5}\cdot|y|^{2/7})$;

г) $f(x,y)=\arcsin(xy+\sqrt[3]{x^3+y^3})$

д) $f(x,y)=\dfrac{\ln((1+xy)/(1-xy))-2xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $x^2+y^2>0$

$f(0,0)=0$.

Решение: а) Найдем приращение Δf функции f в точке $(0,0)$ и вычислим ее частные производные: $f(x,0)=0$, $f(0,y)=0$: $\Rightarrow$

$\Delta f=\sqrt[3]{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}$, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

Если f дифференцируема в т. $(0,0)$, тогда

$\sqrt[3]{|\Delta x||\Delta y|}=o(\rho)$, где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

В частности, при $\Delta x=\Delta y$. Тогда $\rho=|\Delta x|\sqrt{2}$

и $\sqrt[3]{(\Delta x)^2}=o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$, что не верно!

$|\Delta x|^{-1/3}\neq o(1)$

Следовательно, f не дифер. в т. $(0,0)$.

б) $f(x,0)=1$, $f(0,y)=1$ $\Rightarrow$ $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

Докажем, что f — дифференцируема в т. $(0,0)$

т.е. $\Delta f = \cos\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y} - 1 = o(\rho)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$

Заметим, что $\cos t - 1 = -2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, $|\sin t| \le |t|$

Используем нер-ва $|\Delta x| < \rho$, $|y| < \rho$. Получим

$$|\Delta f| \le \frac{1}{2}|\Delta x|^{\frac{2}{3}} \cdot |\Delta y|^{\frac{2}{3}} \le \frac{1}{2}\rho^{4/3}, \text{ т.е.}$$

$$|\Delta f| = o(\rho), \ \rho \to 0. \text{ и } f\text{ — дифф. в т. } (0,0)$$

б) $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = \operatorname{arctg} 5$

т.е. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. При этом

$$\Delta f = \operatorname{arctg}(5 + |\Delta x|^{4/5} \cdot |\Delta y|^{2/7}) - \operatorname{arctg} 5$$

Используем неравенства:

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a - b|, \ |x| < \rho, \ |y| < \rho$$

$$|\Delta f| \le |\Delta x|^{4/5} \cdot |\Delta y|^{2/7} \le \rho^{4/5 + \frac{2}{7}} = \rho^{\frac{38}{35}}$$

Следовательно, $|\Delta f| = o(\rho)$, $\rho \to 0$ и

$f(x,y)$ — дифференцируема в т. $(0,0)$

г) $f(0,0) = 0$, $f(x;0) = \arcsin x$, $f(0,y) = \arcsin y$

$f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 1$. Пусть дифференц.

$$\Delta f = \arcsin(\Delta x \Delta y + \sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3}) = \Delta x + \Delta y + \underset{\rho \to 0}{o(\rho)}.$$

Положим $\Delta x = \Delta y$, $\rho = \Delta x\sqrt{2}$ и

$$\arcsin\left(\Delta x^2 + \sqrt[3]{2\Delta x^3}\right) = 2\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0$$

Отсюда

$$\Delta x^2 + \Delta x \sqrt[3]{2} + o(\Delta x) = 2\Delta x + o(\Delta x)$$

т.е. $\sqrt[3]{2} = 2 + o(1) \Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2$ Неверно

д) $f(x,0) = f(0,y) = 0,\quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

Если f дифференцируема в т. $(0,0)$, то

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) = o(\rho),\quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Положим $\Delta x = \Delta y$, $\Delta x > 0$.

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta x) = \frac{\ln\left((1+\Delta x^2)/(1-\Delta x^2)\right) - 2\Delta x^2}{(2\Delta x^2)^{5/2}} \underset{\Delta x \to 0}{=} o(\Delta x)$$

Воспользуемся тем, что

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2t + \frac{2}{3}t^3 + o(t^3),\ t \to 0$$

Тогда

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta x) = \frac{2\Delta x^6/3 + o(\Delta x^6)}{2^{5/2}\cdot \Delta x^5} = o(\Delta x)$$

т.е. $2^{-\frac{3}{2}} 3^{-1} \Delta x = o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0)$

что неверно. Значит, не дифференцируема

③ Частные производные сложной ф-ии

Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определены в $U(x_0,y_0)$; $f(u,v)$ — определена в $U(u_0,v_0)$, где $(u_0,v_0)=(u(x_0,y_0),\ v(x_0,y_0))$.

Если $f(u,v)$ — дифференцируема в т. (u_0,v_0)

И существуют частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y} \text{ в т. } (x_0,y_0)$$

Тогда существуют частные производные сложной функции $F(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ причем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Аналогичные формулы для частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$ для сложной функции $f(u_1,u_2,\dots,u_m)$, $u_k=u_k(x_1,\dots,x_n)$, $k=1,\dots,m$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_i},\quad i=1,2,\dots,n$$

4) Свойства дифференциала

а) $\forall\, u(x), v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы рав-ва:

$$d(\alpha u + \beta v) = \alpha\, du + \beta \cdot dv,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – постоянные.

$$d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$$

$$(1)\quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Задача 3. Найти дифференциал функции: $f = 1 + \dfrac{z}{x^2+y^2}$

Решение: По формуле (1)

$$df = d\left(1 + \frac{z}{x^2+y^2}\right) = d\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)\,dz - z\,d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}\,dy + \frac{1}{x^2+y^2}\,dz.$$

Найдем дифференциал сложной ф-ии:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

Это свойство называется <u>свойством инвариантности 1-го дифференциала относительно замены переменных</u>

<u>Задача 4</u> Пусть $f(u, v)$ – дифференцируемая функция, $u = xy$, $v = x^2 - y^2$. Найти $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ через $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$.

<u>Решение:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y + \frac{\partial f}{\partial v} 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y$$

<u>Задача 5</u> Дана дифф. функция $f(u, v)$. $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{z}$. Найти df через f_u, f_v

Решение:

$$df = f_u du + f_v dv = f_u d\left(\frac{x}{y}\right) + f_v\left(\frac{y}{z}\right) =$$

$$= f_u \frac{y dx - x dy}{y^2} + f_v \frac{z dy - y dz}{z^2} =$$

$$= \frac{1}{y} f_u dx + \left(\frac{1}{z} f_v - \frac{x}{y^2} f_u\right) dy - \frac{y}{z^2} f_v \cdot dz$$

Задача 6. Доказать, что функция $z = \varphi(x^2 + y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2) 2xy - \varphi'(x^2 + y^2) 2xy \equiv 0$$