1к

Мат. Анализ Семинар № 25

① Частные производные функций заданных неявно. (одно уравнение)

Пусть вещественная функция $F(x,u)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}$, равна нулю в точке $(x^0,u^0)=(x_1^0,\dots,x_n^0,u^0)$, $\boxed{F(x^0,u^0)=0}$, она непрерывна в нек. окр. $U(x^0,u^0)$, имеет частную производную $F_u(x,u)$, непрерывную в т. (x^0,u^0), и при этом $\boxed{F_u(x^0,u^0)\neq 0}$.

Тогда в некоторой окрестности $U(x^0)$ в $\mathbb{R}^n$ существует единственная непрерывная функция $u=f(x)$, $x\in U(x^0)$ такая, что $u^0=f(x^0)$, удовлетворяющая уравнению:

(1) $$\boxed{F(x,f(x))=0}, \quad x\in U(x^0)$$

Если, кроме того, частные производные $F_{x_k}(x,u)$, $k=1,\dots,n$, непрерывны в т. (x^0,u^0), то в т. x^0 существуют все частные производные функции $u=f(x)$, которые вычисляются по формуле

(2) $$\boxed{f_{x_k}(x^0)=-\frac{F_{x_k}(x^0,u^0)}{F_u(x^0,u^0)}}$$

т.е., в других обозначениях:

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, u^0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^0, u^0)}.$$

Формулы (2) и (3) можно получить из (1), применяя правило дифференцирования сложной функции:

$$F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x_k} \Big/ \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Другой способ: взять полный дифференциал и приравнять его нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F}{\partial u} du = 0$$

Тогда $$du = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial u}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n \right)$$

т.е. $$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x, u)}$$

Задача 1. Функция $z=f(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=x^2-2y^2+3z^2-yz+y$.

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Решение: 1 способ. находим $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ и подставляем в формулу (3):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-4y-z+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=6z-y.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2x}{6z-y}, \quad \boxed{6z-y\neq 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{1-4y-z}{6z-y}$$

2 способ: берем полный дифференциал

$$2x\,dx-4y\,dy+6z\,dz-z\,dy-y\,dz+dy=0$$

И выражаем dz:

$$dz=-\frac{2x\,dx+(1-4y-z)\,dy}{6z-y}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y-6z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-4y-z}{y-6z}.$$

Задача 2. Найти в т. $(1,1)$ частные производные функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, где

$$F(x,y,z) = z^3 - 2z^2x + zxy - 2 = 0.$$

$$(x_0, y_0) = (1,1) \Rightarrow z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0.$$

Решаем уравнение: $z^2(z-2) + (z-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z^2+1)(z-2) = 0 \Rightarrow z = 2$ единств. реш.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2z^2 + zy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = zx; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 4zx + xy$$

подставили в формулу: Условие:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2) = 12 - 8 + 1 = 5 \neq 0.$$

Тогда
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-2z^2 + zy}{3z^2 - 4zx + xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{8-2}{12-8+1} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{2}{5}$$

2) Неявная функция заданная системой уравнений. Частное дифференцирование

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=0 \\ F_2(x,y,u,v)=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} F_i \in C^1(\mathcal{U}(x_0,y_0,u_0,v_0)) \\ F_i(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \\ i=1,2 \end{array}$$

Рассмотрим матрицу частных производных:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}, & \frac{\partial F_1}{\partial y}, & \frac{\partial F_1}{\partial u}, & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}, & \frac{\partial F_2}{\partial y}, & \frac{\partial F_2}{\partial u}, & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{matrix} \right\| \quad \text{матрица } 2\times 4$$

Предположим, что

$$(4)\ \det \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в т. } (x_0,y_0,u_0,v_0)$$

Тогда $\exists!$ отображ. $f: \mathcal{U}(x_0,y_0) \to \mathcal{U}(u_0,v_0)$

для которого $(f = f_1(x,y), f_2(x,y))$

$$(5)\ \begin{cases} F_1(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0 \\ F_2(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0 \end{cases}, \ \forall (x,y)\in \mathcal{U}(x_0,y_0).$$

При этом частные производные f находятся по формуле:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Чтобы получить эту формулу (6) надо продифференцировать уравнение (5) по x и по y; по правилу дифференцирования <u>сложной функции</u>:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad i=1,2$$

в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Аналогично в n-мерном случае

$$F_i(x, u) = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$$

Пусть $F_i \in C^1(U(x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0))$ и в точке (x^0, u^0) <u>Не равен нулю определитель</u>:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

<u>матрица</u> $m \times m$

Тогда $\exists!\ f : U(x^0) \to U(u^0)$,

$$u_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n:$$

$$\boxed{F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U(x^0)}$$

т.е. $F_i(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n) \dots f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

<u>При этом</u>:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \overset{(7)}{=} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ $\qquad$ $m \times m$ $\qquad$ $m \times n$.

Задача 3. Найти в точке $(1, 0, 1, -2)$ частные производные функций $u = f_1(x, y)$ и $v = f_2(x, y)$, заданных неявно системой:

$$\begin{cases} x \cdot u + y \cdot v - u^3 = 0 \\ x + y + u + v = 0 \end{cases}$$

Решение: $F_1(x, y, u, v) = xu + y \cdot v - u^3$

$F_2(x, y, u, v) = x + y + u + v$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = v; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = x - 3u^2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v} = y; \quad \frac{\partial F_2}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v} = 1$$

По формуле (6):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x - 3u^2 & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

По правилу Крамера:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{=\Delta}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Delta = x-3u^2-y$

$$= \frac{-1}{x-3u^2-y} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -1 & x-3u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{x-3u^2-y} \begin{pmatrix} u-y & v-y \\ -u+x-3u^2 & -v+x-3u^2 \end{pmatrix}$$

Подставим т. $(1, 0, 1, -2)$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Рассмотрим случай $n=1,\ m=2$

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=z(x) \\ y=y(x) \end{cases}$$ — кривая в $\mathbb{R}^3$

Уравнение для производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dx} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dz}{dx} \\[2ex] \dfrac{dz}{dy} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

При условии: $\Delta \neq 0$

Задача 4. Найти производную кривой в $\mathbb{R}^3$ заданной неявно системой:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$F_1(x,y,z) = x+y+z$

$F_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dx} \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(y-z)} \cdot \begin{pmatrix} 2z & -1 \\ -2y & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z-x}{y-z} \\ \frac{x-y}{y-z} \end{pmatrix}$$

Можно решить явно:

$$\begin{cases} y + z = -x & \Rightarrow y = -x - z \\ y^2 + z^2 = 1 - x^2 \end{cases}$$

Подставим: $(x+z)^2 + z^2 = 1 - x^2$

$$x^2 + 2xz + z^2 + z^2 = 1 - x^2$$

$$2z^2 + 2xz + (2x^2 - 1) = 0$$

Решаем относительно z:

$$z = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 8(2x^2 - 1)}}{4}$$

$$\begin{cases} z = -\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2 - 3x^2} \\ y = -\frac{x}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{2 - 3x^2} \end{cases}$$

Можно дифференцировать, но формулы громоздкие