1к

Мат. Анализ - Семинар №26

Дифференцирование отображений.

Отображение $f: E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, E-область

В координатах: $u_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$

называется дифференцируемым в т. $\boxed{x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)}$,

если $\exists$ числа A_{ik}, $i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$, что

приращение $\Delta f_i = f_i(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f_i(x_1^0, \dots, x_1^n)$

функции f_i в точке x^0, представим в виде:

$$(1)\quad \Delta f_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \Delta x_k + o\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}\right), \quad \|\Delta x\| \to 0$$

$$\|\Delta x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2\right)^{1/2}$$

Рассмотрим матрицу: $A = \{A_{ik}\}_{i=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{n,m} \end{pmatrix}$$

Обозначим:

$$dx = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$ — столбец.

$$df = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix}$$

Тогда $df = A\,dx$ называется дифференциалом отображения f.

Отображение f дифференцируемо, если

(2) $$\boxed{\Delta f = A\Delta x + o(|\Delta x|),\ |\Delta x| \to 0}$$

Если (1) (или (2)), выполнено $\forall x^0 \in E$, то f называется дифференцируемым на E

Теорема 1. Если $f: E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в т. $x^0 \in E$, то существуют частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x^0)$, $i = 1,\dots,m$; $k = 1,\dots,n$

причем $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x^0) = A_{ik}$ (из (1)).

Матрица $A = \boxed{\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x^0)\right\}_{i=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}}$ называется матрицей Якоби отобр. f в т. x_0

Дифференциал: $df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{df_m}{dx_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$

Для дифференцируемости отображения в т. x_0, <u>достаточно</u> существования всех частных производных в <u>окрестности $U(x^0)$</u> и их <u>непрерывность</u> <u>в точке x^0</u>

Еще обозначение: $f'(x^0) = A(x^0)$

---

② Дифференцирование композиции отобр.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$

$$g : G \to \mathbb{R}^k, \quad G \subset \mathbb{R}^m$$

$x^0 = (x^0_1, \dots, x^0_n) \in E$, $y^0 = (y^0_1, \dots, y^0_m) \in G$

$f(x^0) = y^0$, f - дифф. в т. x_0,

g - дифф. в т. y_0,

т.е. $\Delta f = A \Delta x + o(\Delta x)$, $|\Delta x| \to 0$

$$\Delta g = B \Delta y + o(\Delta y), \quad |\Delta y| \to 0.$$

Рассмотрим композ. $F : E \to \mathbb{R}^k$,

$$F(x) = f \circ g(x) = g(f(x)).$$

Тогда $F(x)$ – дифференцируем в т. x_0, т.е.

$$\Delta F = C \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad |\Delta x| \to 0.$$

причем $C = B \cdot A$, т.е. $F' = g' \cdot f'$,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_l}(x^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y^0)\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x^0)$$

$i=1,\dots,k;\ l=1,\dots,n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^0),\dots, & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x^0)\dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}}_{k\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}\dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix}}_{k\times m}(y^0)\ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m\times n}(x^0)$$

---

③ <u>Якобиан.</u>

Если $n=m$, $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$

Тогда матрица Якоби <u>квадратная</u> и её определитель называется <u>якобианом отображения</u> f в т. x^0:

$$|f'| = \det f' = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$$

<u>Теорема 3.</u> Если якобиан отображ. f в т. x_0 <u>не равен нулю</u> (отображение <u>невырожденное</u>), то $\exists\ U(x_0)$ в которой $\exists$ обратное отображ.: $f^{-1}: U(y) \to U(x)$,

Задача 1. Найти матрицу Якоби и якобиан

$$f: (r, \varphi) \to (x, y), \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

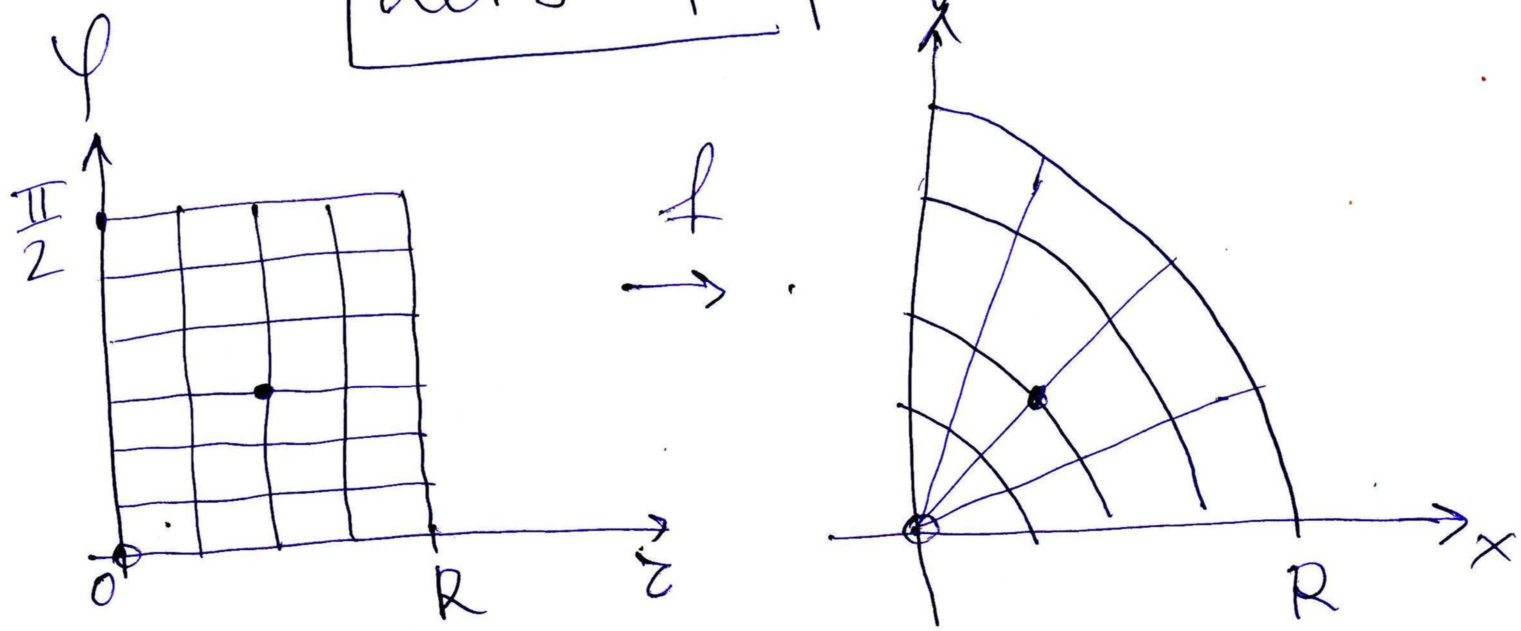
$r > 0, \ \varphi \in (0, 2\pi).$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Якобиан: $\det J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$$= \cos\varphi\cdot r\cos\varphi + r\sin\varphi\,\sin\varphi = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

$$\boxed{\det J = r}$$



Отображение невырожденно $\forall\, r \neq 0$.

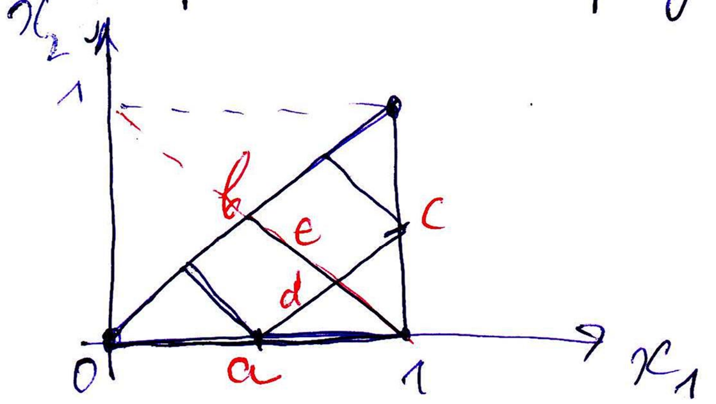
Задача 2. Найти матрицу Якоби и якобиан.

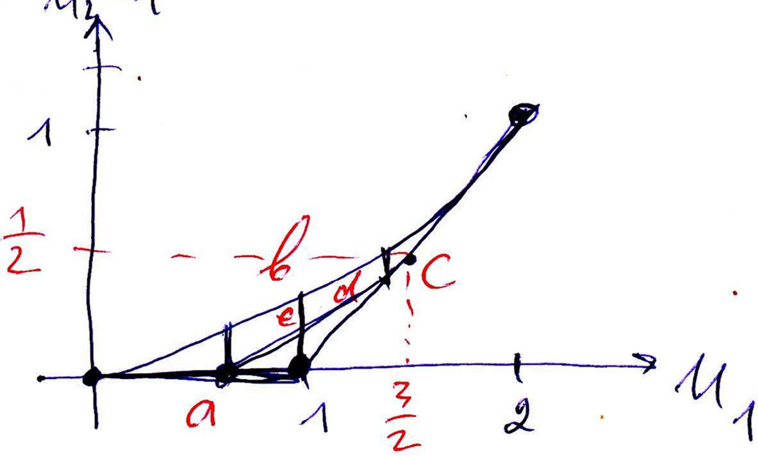
$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 \\ u_2 = x_1 \cdot x_2 \end{cases} \qquad f: (x_1, x_2) \to (u_1, u_2)$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$\det J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2).$$

Отобр. не вырожд.: $x_1 \neq x_2$





a: $(x_1, 0) \to (x_1, 0)$ (отрезок)

b: $(x_1, x_1) \to (2x_1, x_1^2)$ (парабола)

c: $(1; x_2) \to (1 + x_2, x_2)$ (отрезок)

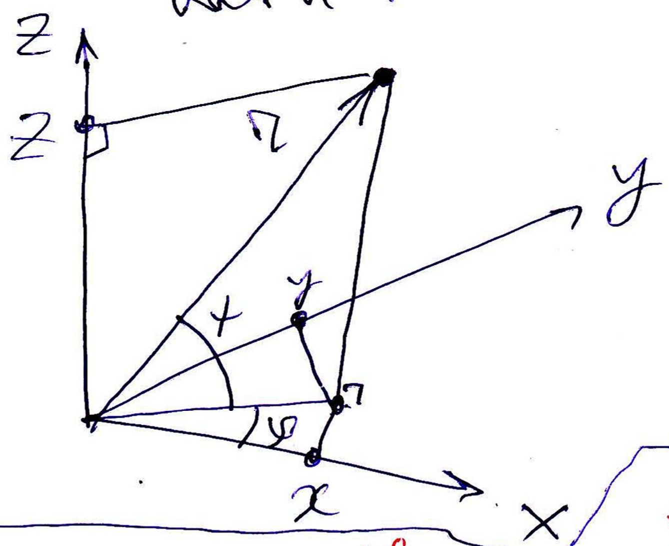
d: $(x_1, x_1 - \frac{1}{2}) \to (2x_1 - \frac{1}{2}, x_1(x_1 - \frac{1}{2}))$ (парабола)

e: $(x_1, 1 - x_1) \to (1, x_1(1 - x_1))$ (отрезок)

Задача 3. Найти якобиан отображения:

Сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cdot\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cdot\cos\psi \\ z = r\cdot\sin\psi \end{cases}$$



$r > 0$

$0 < \varphi < 2\pi$

$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$

Решение:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & \varphi & \psi \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\psi & -r\sin\varphi\cdot\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cdot\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= r^2\cdot\sin\psi\begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} + r^2\cos\psi\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\psi\cdot\cos\psi\sin\psi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2\cos\psi\cdot\cos\psi\cos\psi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$$

$$= r^2\sin^2\psi\cdot\cos\psi + r^2\cos^2\psi\cdot\cos\psi = r^2\cos\psi(\sin^2\psi+\cos^2\psi) =$$

$$= r^2\cos\psi$$

Ответ: $\det J = r^2\cdot\cos\psi \neq 0,\ r \neq 0.$

Задача 4. Найти ранг отображения в каждой точке: $(x,y,z)\to(s,t)$.

$$\begin{cases} s = x+y+z \\ t = x^2+y^2+z^2 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Очевидно: $r \geq 1$ 1) $x=y=z \Rightarrow r=1$

2) Если $x\neq y$ или $y\neq z \Rightarrow r=2$

Задача 5. Найти ранг отображения:

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u^2+v^2 \\ z = u^3+v^3 \end{cases} \qquad (u,v)\to(x,y,z) \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $r \geq 1$, причем: 1) $u=v \Rightarrow r=1$

2) $u\neq v \Rightarrow r=2$

5) Замены переменных.

При решении некоторых задач, например, дифференциальных уравнений, бывает полезно делать замену переменных. При этом используется правило дифференцирования сложной функции.

Задача 6. Преобразовать уравнение, $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, приняв за новые переменные: $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ и новую функцию $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

Решение: Надо выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$: Имеем:

$du = dx$, $dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}$

$dw = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}$. С другой стороны:

$dw = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$. Следовательно,

$$\frac{\partial w}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}$$

Получили:

$$\frac{\partial w}{\partial u}dx + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}\right) = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}$$

Откуда выражаем dz:

$$dz = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}dy$$

Следовательно:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = z^2\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z^2}{y^2}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial v} \end{cases}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$x^2\cdot z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right) + y^2\cdot\frac{z^2}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v} = z^2$$

$$\cancel{z^2} - x^2 z^2\cdot\frac{\partial w}{\partial u} - \cancel{z^2\cdot\frac{\partial w}{\partial v}} + \cancel{z^2\cdot\frac{\partial w}{\partial v}} = \cancel{z^2}$$

$$x^2\cdot z^2\frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

Решение этого дифф. уравнения не зависит от $\underline{u}$! т.е. $w = f(v)$

Возвращаемся в исходные переменные:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

<u>Ответ:</u> $z = \dfrac{x}{x f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + 1}$

это решение исх. ур-я

Задача 7. Преобразовать уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$, перейдя в полярные координаты: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Решение:

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dy(x-y) = dx(x+y)$$
$$(r\cos\varphi - r\sin\varphi)\, dy = (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\, dx$$
$$(\cos\varphi - \sin\varphi)(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) = (\cos\varphi + \sin\varphi) \times$$
$$\times (\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)$$

Раскрываем скобки:

$$(\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} - \sin^2\varphi)\, dr + r(\cos^2\varphi - \cancel{\cos\varphi\sin\varphi})\, d\varphi =$$
$$= (\cos^2\varphi + \cancel{\cos\varphi\sin\varphi})\, dr - r(\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} + \sin^2\varphi)\, d\varphi$$
$$(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, dr = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi$$
$$dr = r\, d\varphi$$
$$\frac{dr}{d\varphi} = r \Rightarrow r = C \cdot e^{\varphi}$$

Подставляем $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Получили: $\sqrt{x^2+y^2} = C \cdot e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

Это трансцендентное уравнение задает решение исходного Д.У.