1к

Мат. Анализ. Семинар № 28

Частные производные и дифференциалы высших порядков

① Частные производные высших порядков

Пусть ф-я $u = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в окр. т. $x = (x_1, \dots, x_n)$ имеет частную производную первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_k}$. Тогда частную производную от $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ по переменной x_i называют <u>частной производной второго</u> порядка по переменным x_k и x_i. Обозначения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \quad f_{x_k x_i} \quad \text{или} \quad f''_{x_k x_i}$$

т.е., по определению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

При $i = k$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (обозначение)

<u>Частной производной порядка</u> $m \in \mathbb{N}$ называют частную производную первого порядка по какой-либо переменной от любой частной производной порядка $\underline{m-1}$ (при $m=0$ это сама функция $\underline{u}$)

Например, для частных производных 3-го порядка имеем по определению:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \text{ и т. д.}$$

Частные производные по разным переменным называют смешанными частн. произв.
Например, у функции $u(x,y)$ двух переменных x и y могут существовать 4 производные 2-го порядка:
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и 2 смешанные: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$
(они, вообще говоря различные)

Теорема. Если две частные производные порядка и отличаются только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они совпадают в этой точке.

Определение: Функция, у которой все частные производные до порядка n включительно, непрерывны в некоторой точке называют n раз непрерывно дифференцируемой в этой точке (или на мн-ве)

② Дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема на $G \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(G)$.
Её дифференциал
$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$
есть функция 4-х переменных: x, y, dx, dy при фиксированных dx и dy, только от x и y.
Найдём от этой функции дифференциал, причём в качестве приращений Δx и Δy выберем те же приращения, что и при нахождении 1-го дифференциала. Такой дифференциал называется вторым дифференциалом или дифференциалом 2-го порядка функции $u=f(x,y)$, обозначается
$$d^2u \quad \text{или} \quad d^2f,$$
т.е. по опред.:
$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$
или, учитывая равенство смешанных производных (при условии Теоремы):
$$(1) \quad d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

(это квадратичная форма относительно переменных dx и dy)

Аналогично, если $f \in C^m(G)$, то её дифференциал m-го порядка определяется как 1-дифференциал от дифференциала $(m-1)$-го порядка:

$$d^m u = d(d^{m-1} u).$$

Справедлива формула (бином Ньютона):

(2) $$d^m u = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k,$$

которая вытекает из такой формы m-го дифференциала:

$$d^m u = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^m u$$

где $dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}$ – оператор дифференцирования 1-го порядка, (dx, dy – константы). Действуют обычные правила перемножения операторов, причем $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$.

<u>Замечание</u>: Для сложной функции $w = f(x,y)$, где $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, второй дифференциал $d^2 w$, вообще говоря не выражается через dx и dy по формуле (1). Значит, здесь не

действует правило инвариантности формы дифференциала относительно выбора переменных. Имеет место более сложная формула:

$$d^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy^2 +$$

$$(3) \qquad + \frac{\partial w}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial w}{\partial y}d^2 y, \qquad \boxed{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{aligned}}$$

где d^2x и d^2y – вторые дифференциалы функций x и y:

$$d^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2,$$

$$d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv^2.$$

Если x и y – независимые переменные, то $d^2x = 0$, $d^2y = 0$ и получаем формулу (1).

---

③ Случай функции n-переменных.

$u = f(x_1, x_2, .., x_n)$, $x = (x_1, .., x_n) \in G$, имеют место формулы, аналогичные (1) и (2)

$$d^2 u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + 2\sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}dx_i\,dx_k$$

Для дифференциала $d^m u$ имеем формулы:

$$d^m u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m u =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} C_m^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} \cdot dx_1^{\alpha_1}\dots dx_n^{\alpha_n},$$

где $C_m^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \dfrac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_n!}$

суммирование производится по всем неотрицательным индексам $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, таким что $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = m$.

Задача 1. Найти второй дифференциал функции $u = x\cdot e^y$, если

а) x и y - функции независимых переменных

б) x и y - независимые переменные.

Решение а) I способ

По определению 2-го дифференциала:

$$d^2u = d(d(xe^y)) = d(e^y dx + xe^y dy) =$$

$$= \left(d(e^y)dx + e^y d^2x\right) + \left(d(xe^y)dy + xe^y d^2y\right) =$$

$$= \left(e^y dxdy + e^y d^2x\right) + xe^y dy^2 + e^y dxdy + xe^y d^2y =$$

$$= 2e^y dxdy + xe^y dy^2 + e^y d^2x + xe^y d^2y$$

<u>II способ</u>: Воспользуемся формулой (3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y$$

Подставим в формулу:

$$d^2u = 2e^y dxdy + xe^y dy^2 + e^y d^2x + x \cdot e^y d^2y$$

б) Если x и y - независимые переменные, то $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, следовательно

$$d^2u = 2e^y dxdy + xe^y dy^2$$

<u>Задача 2</u>. Проверить равенства $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, если а) $u = x^{y^2}$; б) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

<u>Решение</u>: а) <u>Имеем</u>:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \cdot x^{y^2-1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y x^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y x^{y^2} \ln x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y x^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x)$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}$

б) <u>Аналогично</u>:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(xy - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x}{4}(xy - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2}(xy^3 - x^2y^2)^{-1/2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{4}(xy - x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

т.е. $u_{xy} = u_{yx}$, при $0 < \frac{x}{y} < 1$

Задача 3. Пусть $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{если } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Проверить, что $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

Решение: При $x^2+y^2\neq 0$

$$f'_x(x,y)=y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y)=x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

При $x=y=0$, находим $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$ непосредственно:

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

Находим теперь смешанные производные:

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^3}{y^3}=-1$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1.$$

Убеждаемся, что $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

Заметим, что в т. $(0,0)$ не выполнены достаточные условия равенства смеш. произв.
Действительно, при $x^2+y^2\neq 0$

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Рассмотрим последоват. точек $M_n=\left(\frac{a}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$ $(n\to\infty)$.
Но при этом

$$\lim_{n\to\infty} f''_{xy}(M_n)=\lim_{n\to\infty} f''_{yx}(M_n)=\frac{a^2-1}{a^2+1}\left(1+\frac{8a^2}{(a^2+1)^2}\right)\neq 0$$

т.е. смешанные производные имеют разрыв в т. $(0,0)$.

<u>Задача 4</u> Существует ли $f''_{xx}(0,0)$, если

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2} \text{ при } x^2+y^2\neq 0, \text{ и } f(0,0)=0.$$

<u>Решение</u>: при $x^2+y^2\neq 0$

$$f'_x(x,y)=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$ при $x=y=0$

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0.}\frac{0}{x}=0$$

Найдем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2y^3}{y^4}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{2}{y^2}=\infty.$$

Не существует!

Определение. Функция $f(x_1, x_2, .., x_n)$ называется однородной степени p, если $\forall (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \ f(\lambda x_1, .., \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, .., x_n)$

Задача 5. Дифференцируемая функция $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ является однородной степени p $\Leftrightarrow$ она удовлетворяет уравнению:

(4) $$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = p \cdot f.$$

Решение: $\Rightarrow$ Пусть однородна, тогда $f(tx, ty, tz) = t^p \cdot f(x, y, z)$. $\forall t \geq 0$.

Дифференцируем обе части по t как сложную функцию:
$$x f'_x(tx, ty, tz) + y f'_y(tx, ty, tz) + z \cdot f'_z(tx, ty, tz) = p \cdot t^{p-1} \cdot f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \forall t \geq 0.$$

Подставляем $t = 1$: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
$$\boxed{x f'_x(x, y, z) + y \cdot f'_y(x, y, z) + z \cdot f'_z(x, y, z) = p f(x, y, z)}$$

Обратно. Пусть выполнено уравнение (4).
Рассмотрим $\forall$ т. $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$
Рассмотрим ф-цию $F(t) = \dfrac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^p}$

Эта функция определена, непрерывна и дифференцируема для всех $t > 0$.

Вычислив производную $F'(t)$, получим выражение, числитель которого равен:

$$t\left(x_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + z_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\right) -$$

$$(5) \qquad - p f(tx_0, ty_0, tz_0).$$

Заменяя в уравнении (4) (x, y, z) на (tx_0, ty_0, tz_0), получаем, что числитель (5) равен нулю, т.е. $F'(t) = 0 \Rightarrow F(t) = C$.

Для определения константы C положим $t = 1$, т.е. $C = f(x_0, y_0, z_0)$. Поэтому, из определения $F(t)$: $f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^p f(x_0, y_0, z_0)$

$$\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

т.е. f – однородная степени p.

Задача 6. Доказать, что если $f(x, y, z)$ – дифференцируемая однородная функция степени p, то частные производные f'_x, f'_y, f'_z – однородные функции степени $(p-1)$.

Решение: Имеем, в силу однородности

$$f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z).$$

Обе части дифференцируемы по x, y, z.
Дифференцируем по x:

$$f'_x(tx, ty, tz)\cdot t = t^p f'_x(x, y, z)$$

т.е. $f'_x(tx, ty, tz) = t^{p-1} f'_x(x, y, z)$, т.е. f'_x – однородная степени $p-1$.
Аналогично для f'_y, f'_z.

Задача 7. Пусть $u(x, y, z) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ – однородная функция степени p.
Доказать:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = p(p-1)u$$

Решение: Поскольку u однородна, то

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = p\cdot u$$

Заменим x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0 и дифференцируем по t, получаем

$$\underline{x_0\cdot u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z} + tx_0^2\cdot u''_{x^2} + ty_0^2 u''_{y^2} + tz_0^2 u''_{z^2} +$$

$$+ t(2x_0y_0 u''_{xy} + 2x_0z_0 u''_{xz} + 2y_0z_0 u''_{yz}) =$$

$$= p\cdot(\underline{x_0\cdot u'_x + y_0 u'_y + z_0\cdot u'_z}).$$

Подставляем $t = 1$: Получаем:

$$x_0^2 u''_{x^2} + y_0^2 u''_{y^2} + z_0^2 u''_{z^2} + 2\left(x_0 y_0 u''_{xy} + x_0 z_0 u''_{xy} + y_0 z_0 u''_{yz}\right) =$$

$$= (p-1)\left(x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z\right)$$

т.е.

$$\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = (p-1)p \cdot u$$

т.к. $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ – произвольная точка

Тождество доказано.

Задача 8. Доказать, что если $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то $d^2u \geq 0$.

Решение: Обозначим $\varphi = x^2+y^2+z^2$

Тогда продифференцируем выражение $u = \sqrt{\varphi}$:

$$du = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

$$d^2u = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{1}{(\sqrt{\varphi})^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 =$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)(dx^2+dy^2+dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2}{(\sqrt{\varphi})^3} =$$

$$= \frac{(x\,dy - y\,dx)^2 + (x\,dz - z\,dx)^2 + (y\,dz - z\,dy)^2}{(\sqrt{\varphi})^3} \geq 0$$

Задача 9. Пусть $P_n(x,y,z)$ – однородный многочлен степени n. (т.е. степень однородности равна степени многочлена!) Доказать, что $d^n P_n(x,y,z)=n!\,P_n(dx,dy,dz)$.

Решение: т.к. P_n – однородный степени n

(6) $P_n(tx,ty,tz)=t^n P_n(x,y,z)$.

Вычислим n-ю производную от обеих частей

(7) $P_n^{(n)}(tx,ty,tz)=n!\,P_n(x,y,z)$.

Обозначим левую часть (6) через $F(t)$

Находим, последовательно дифференцируя:

$$F'(t)=\frac{\partial P_n}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial P_n}{\partial y}y+\frac{\partial P_n}{\partial z}z=$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)P_n(tx,ty,tz)$$

$$F''(t)=\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}x^2+\frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2}\cdot y^2+\frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2}z^2+$$

$$2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x\partial y}xy+2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x\partial z}xz+2\frac{\partial^2 P_n}{\partial y\partial z}yz=$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 P_n(tx,ty,tz)$$

методом мат. индукции доказываем, что

$$F^{(n)}(t)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n P_n(tx,ty,tz)$$

Поскольку P_n – однородный многочлен степени n, то частные производные 1-го порядка – однородные функции $(n-1)$ порядка (задача 6). Следовательно, частные производные n-го порядка – однородные функции <u>нулевого</u> порядка, т.е. они являются константами, т.е. не зависят от t. Поэтому

$$F^{(n)}(t)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n P_n(x,y,z). \qquad (8)$$

Сравнивая (7) и (8) и заменяя x,y,z на dx,dy,dz, получаем:

$$d^n P_n(x,y,z)=n!\,P_n(dx,dy,dz).$$