1К

Мат. Анализ. Семинар № 29

Частные производные и дифференциалы высших порядков (продолжение)

Задача 1. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядка от функции

$$u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Решение:

$$du = f'\,d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f'\cdot\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$d^2u = d(f')\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'\,d\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Найдем отдельно

$$d(f') = f''\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \qquad d^2x = 0,\ d^2y = 0$$

т.к. незав.

$$d\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = d\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + d\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy =$$

$$= \frac{dx\sqrt{x^2+y^2} - x\,d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\,dx + \frac{dy\sqrt{x^2+y^2} - y\,d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= \frac{dx\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^2dx + xy\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\,dx + \frac{dy\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{xy\,dx + y^2dy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= \frac{y^2dx^2 - xy\,dx\,dy + x^2dy - xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{y^2dx^2 - 2xy\,dx\,dy - x^2dy^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

Получаем

<u>Ответ:</u> $$d^2u = f''\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'\cdot\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

(при $x^2+y^2\neq 0$)

<u>Задача 2.</u> Найти du и d^2u для функции

$u=f(\xi,\eta)$, $\xi = x+y$, $\eta = x-y$

<u>Решение:</u> Заметим, что ξ и η – линейные функции x и y, поэтому $\boxed{d^2\xi = 0,\ d^2\eta = 0}$

Следовательно:

$$du = f'_\xi\,d\xi + f'_\eta\,d\eta = f'_\xi(dx+dy) + f'_\eta(dx-dy) =$$

$$= (f'_\xi + f'_\eta)\,dx + (f'_\xi - f'_\eta)\,dy$$

$$d^2u = f''_{\xi^2}\,d\xi^2 + 2f''_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta + f''_\eta\,d\eta^2 =$$

$$= f''_{\xi^2}(dx+dy)^2 + 2f''_{\xi\eta}(dx^2-dy^2) + f''_{\eta^2}(dx-dy)^2 =$$

$$= \left(f''_{\xi^2} + 2f''_{\xi\eta} + f''_{\eta^2}\right)dx^2 + 2\left(f''_{\xi^2} - f''_{\eta^2}\right)dx\,dy +$$

$$+ \left(f''_{\xi^2} + 2f''_{\xi\eta} + f''_{\eta^2}\right)dy^2$$

Задача 3. Доказать, что форма дифференциала произвольного порядка функции $f(\xi,\eta,\zeta)$ сохраняется при замене аргументов ξ,η,ζ линейными функциями:

$$\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z,\quad \eta = b_1 x + b_2 y + b_3 z,\quad \zeta = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

Решение: $df = f'_\xi\, d\xi + f'_\eta\, d\eta + f'_\zeta\, d\zeta$

(это верно $\forall$ замены переменных)

Находим 2-й дифференциал:

$$d^2 f = f''_{\xi^2} d\xi^2 + f''_{\eta^2} d\eta^2 + f''_{\zeta^2} d\zeta^2 + 2 f''_{\xi\eta} d\xi\, d\eta + 2 f''_{\xi\zeta} d\xi\, d\zeta + 2 f''_{\eta\zeta} d\eta\, d\zeta + \underbrace{f'_\xi d^2\xi + f'_\eta d^2\eta + f'_\zeta d^2\zeta}_{0}$$

Однако, в силу линейности замены ξ,η,ζ

$$d^2\xi = d^2\eta = d^2\zeta = 0.$$

Получаем:

$$d^2 f = \left(d\xi \frac{\partial}{\partial\xi} + d\eta \frac{\partial}{\partial\eta} + d\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^2 f.$$

Методом математической индукции доказывается, что

$$d^n f = \left(d\xi \frac{\partial}{\partial\xi} + d\eta \frac{\partial}{\partial\eta} + d\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f,$$

т.е. форма дифференциалов произвольного порядка сохраняется при линейной замене аргументов.

Задача 4. Найти $d^n u$ для ф-ии $u = f(ax + bx + cz)$.

Решение: Воспользуемся решением зад. 3. Замена линейная $\Rightarrow$ форма инвариантна

$$d^n u = f^{(n)}(d(ax+by+cz))^n =$$
$$= f^{(n)}(ax+by+cz)\cdot(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n$$

Определение. Функция $u(x,y)$ называется гармонической, если $u_{xx}+u_{yy}=0$.

Обозначим: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$.

Аналогично, если $u = u(x_1, x_2 \dots, x_n)$, то

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$

Задача 5. Доказать, что следующие функции являются гармоническими.

а) $u = x^2 - y^2$; б) $u = e^{\alpha x}\cos\alpha y$;

в) $\ln(x^2+y^2)$, г) $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ (полярный угол)

Решение: а) $u_{xx} = 2$, $u_{yy} = -2$, т.е.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

б) $u_x = \alpha e^{\alpha x}\cos\alpha x$, $u_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\alpha x$

$u_y = -\alpha e^{\alpha x}\sin\alpha x$, $u_{yy} = -\alpha^2 e^{\alpha x}\cos\alpha x$

т.е. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

в) $u_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $u_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$

$$u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$u_{yy} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$; $u_{xx}+u_{yy} = 0$.

г) $$du = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} =$$

$$= \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \Rightarrow u_x = -\frac{y}{x^2+y^2},\ u_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$u_{xx} = \dfrac{+2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $u_{yy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy} = 0$

Задача 6. Пусть $u = u(x,y)$ — гармоническая функция. Доказать, что $v = u\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ тоже гармоническая функция.

Решение: Обозначим $\varphi = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\psi = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u'_\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u'_\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad \frac{\partial v}{\partial y} = u'_\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + u'_\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u''_{\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2u''_{\varphi\psi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + u''_{\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + u'_\varphi\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + u'_\psi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = u'_{\varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2u''_{\varphi\psi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} + u''_{\psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + u'_{\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + u'_{\psi}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

Отсюда получаем:

$$\Delta v = u''_{\varphi^2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) + u''_{\psi^2}\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right) +$$

(1)

$$+ 2u''_{\varphi\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + u'_{\varphi}\,\Delta\varphi + u'_{\psi}\,\Delta\psi$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Отсюда получаем: $\Delta\varphi = 0$, $\Delta\psi = 0$

(т.е. φ и ψ — гармонические ф-ии!)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

$$\boxed{\Delta v = 0}$$

Поэтому, из (1):

$$\Delta v = u''_{\varphi^2}\cdot\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + u''_{\psi^2}\,\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{\Delta u}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Задача 7. Записать оператор Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ в полярных координатах

Решение: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Из этих равенств получаем:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

[было на прошлом семинаре]

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\cos^2\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} - 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial r}\cdot\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} - 2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial r}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}$$

Откуда получаем, сложив $u_{xx}+u_{yy}$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}{r} + $$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{r^2}.$$

т.е.

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}$$

Получили запись оператора Лапласа в полярных координатах

<u>Задача N8</u> Решить уравнение упругих колебаний струны:

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, сделав замену:

$$\begin{cases} \xi = x+at \\ \eta = x-at \end{cases}$$

<u>Решение:</u> Перепишем частные производные в новых переменных:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} = au_\xi - au_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi + u_\eta) = \left(u_{\xi\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + u_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) +$$
$$+\left(u_{\eta\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + u_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a u_\xi - a u_\eta\right) = \left(a u_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + a u_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) -$$

$$-\left(a u_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + a u_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) =$$

$$= a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}$$

Подставляем в уравнение:

$$a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} = a^2\left(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right)$$

$$4a^2 u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

Решаем уравнение: $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0}$

$\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ – не зависит от $\eta \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \int f(\xi)\,d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Здесь $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ – произвольные функции класса $C^2(\mathbb{R})$. Возвращаемся к исходным переменным:

$$\boxed{u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at)}$$

Это общее решение уравнения бесконечной струны (бесконечной).

Формула Даламбера

Задача 9. Для функции, заданной неявно, найти dz и d^2z, $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$

Решение: Берем дифференциал от обеих частей

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{z^2} = \frac{y}{z}\cdot\frac{y\,dz - z\,dy}{y^2}$$

$$(1)\quad yz\,dx - xy\,dz - yz\,dz + z^2dy = 0$$

т.е.

$$(2)\quad dz = \frac{z(y\,dx + z\,dy)}{y(x+z)}, \quad x \neq z$$

Берем дифференциал от (1), учитывая, что

$d^2x = 0$, $d^2y = 0$ (независимые переменные)

$$dy\,z\,dx + \cancel{y\,dz\,dx} - \cancel{dx\,y\,dz} - x\,dy\,dz - xy\,d^2z - dy\,z\,dz - y(dz)^2 - yz\,d^2z + 2z\,dz\,dy = 0$$

После упрощения:

$$y(x+z)\,d^2z = z\,dx\,dy + (z\,dy - x\,dy)\,dz - y\,dz^2$$

Подставляем dz из (2):

$$d^2z = \frac{z^2(y\,dx - x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3} \qquad x \neq z.$$

Задача 10. Для каждой дифференцируемой функции $u(x,y)$, заданной неявно уравнением

$$F(x,y,u)=2x^2+2y^2+u^2-8xu-u+8=0$$

найти $d^2u(2,0)$.

Решение: 1-й способ: В окр. т. $(2,0)$ уравнение определяет 2 дифф. функции: их значения равны 1 и 16.

Частные производные от ф. $F(x,y,u)$:

$$F'_x=4x-8u,\quad F'_y=4y,\quad F'_u=2u-8x-1$$

Тогда по формуле частных производных неявных функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_u}=4\cdot\frac{2u-x}{2u-8x-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_u}=-\frac{4y}{2u-8x-1}.$$

Дифференцируем 1ое по x, 2ое по x и y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\cdot\frac{(2u-8x-1)\left(2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)-(2u-x)\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-8\right)}{(2u-8x-1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4y\,\frac{2\frac{\partial u}{\partial x}-8}{(2u-8x-1)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4\,\frac{(2u-8x-1)-y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}}{(2u-8x-1)^2}$$

В точке $(2,0,1)$ эти значения будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{4}{15};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{4}{15}$$

Следовательно, при $u(2,0)=1$

$$d^2u=\frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$$

В точке $(2,0,16)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=8;\ \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{4}{15};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{4}{15}$$

Следовательно, при $u(2,0)=16$

$$d^2u=-\frac{4}{15}(dx^2+dy^2).$$

<u>2-й способ</u>: Найдем дифференциал от тождества:

$$2x^2+2y^2+u^2-8xu-u+8=0$$

(3) $4x\,dx+4y\,dy+2u\,du-8x\,du-8u\,dx-du=0$

Теперь возьмем 2-й дифференциал: $(d^2x=0, d^2y=0)$

(4) $4dx^2+4dy^2+2u\,d^2u+2(du)^2-16\,du\,dx-8x\,d^2u-d^2u=0$

В точке (2,0,1) равенство (3) примет вид:

$$du = 0$$

Тогда из (4) $d^2u = \frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$

В точке (2,0,16) равенство (3) дает

$$du = 8dx$$

из (4) $d^2u = -\frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$