1К

Мат. Анализ Семинар № 30

Формула Тейлора и ряд Тейлора

① Формула Тейлора

Напоминание из 1 семестра. Формула Тейлора для функции одной переменной

$n=1$, $f \in C^m(\mathcal{U}(x_0))$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + R_m(x_0, x-x_0).$$

$h = x - x_0$

где: 1) $R_m(x_0, h) = o(|h|^m)$, $h \to 0$,

форма Пеано. Если $\exists f^{(m+1)}(x)$, $x \in G$.

$$2)\ R_m(x_0, h) = \frac{f^{(m+1)}}{(m+1)!}(x_0 + \theta_m h) \cdot h^{m+1}, \quad \theta_m \in (0,1)$$

форма Лагранжа.

Перепишем в т. x_0 с приращением h:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_m(x_0, h).$$

$n=2$ Пусть функция $f(x,y) \in C^m(\mathcal{U}(x_0,y_0))$, т.е. в $\mathcal{U}(x_0,y_0)$ имеет все частные производные до порядка m включительно, непрерывн

Обозначим $(h_1, h_2) = (x - x_0, y - x_0)$ - приращение

Тогда справедлива <u>формула Тейлора</u>

$$f(x+h_1, y+h_2) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot h_1^{k-i} h_2^i +$$

$$+ R_m(x_0, y_0; h_1, h_2).$$

<u>где:</u>

1) $R_m(x_0, h) = o\left(|(h_1, h_2)|^m\right)$, $(h_1, h_2) \to (0, 0)$

$$|(h_1, h_2)| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

<u>формула Пеано</u>

2) Если $f \in C^{m+1}(\mathcal{O})$, то

$$R(x_0, y_0; h_1, h_2) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^i \frac{\partial^{(m+1)} f}{\partial x^{m+1-i} \partial y^i} (x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta h_2) \times$$

$$\times h_1^{m+1-i} \cdot h_2^k$$

$$\theta \in (0, 1)$$

<u>Многочлен Тейлора</u>

$$P_m(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$

Тогда $f(x, y) = P_m(x, y) + R_m(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0)$

Формулу Тейлора можно переписать в более симметричном виде:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \cdot \frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} (x-x_0)^{\alpha_1} \cdot (y-y_0)^{\alpha_2} + o(\rho^m)$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

А в форме Лагранжа:

$$R_m(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m+1} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \frac{\partial^{(m+1)} f(x_0,y_0)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} (x_0+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0)) \cdot (x-x_0)^{\alpha_1}(y-y_0)^{\alpha_2}$$

Пример $m=2$

(α_1,α_2)

$$f(x+h_1,y+h_2) = f(x,y) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h_1}_{(1,0)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, h_2}_{(0,1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot h_1^2}_{(2,0)} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\cdot h_1 h_2}_{(1,1)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, h_2^2 + R_2(x,y,h_1,h_2).$$

Рассмотрим общий случай

$f = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $f\in C^m(G)$. Тогда

$$f(x+h) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\ \alpha_1+\dots+\alpha_n\le m\\ \alpha_i\ge 0}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x)\cdot h^\alpha + R_m(x,h)$$

$|m| = \alpha_1+\dots+\alpha_n$

Обозначения:

$\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$; $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $h^\alpha = h_1^{\alpha_1}\dots h_n^{\alpha_n}$

Остаточные члены:

1) $R_m(x,h) = o(|h|^m)$ $(h \to 0)$ <u>Пеано</u>

2) $$R_m(x,h) = \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^\alpha} f(x+\theta h) \cdot h^\alpha, \quad \theta \in (0,1)$$ <u>Лагранж</u>

При $(x,y) = 0$ формула Тейлора называется формулой <u>Маклорена</u>

---

2) <u>Ряд Тейлора</u>

$n = 1$, $f \in C^\infty(U(x_0))$

Ряд Тейлора в т. x_0:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Если сходится в т. x_0 к ф-ии $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$n = 2$, $f \in C^\infty(U(x_0, y_0))$.

Ряд Тейлора в т. x_0:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(x-x_0)^{k-i}(y-y_0)^i=$$

$$=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_+^2}\frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!}\frac{\partial^{|\alpha_1,\alpha_2|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}f(x_0,y_0)(x-x_0)^{\alpha_1}\cdot(y-y_0)^{\alpha_2}$$

Если сходится к ф. $f(x,y)$, то f — раскладывается в ряд <u>Тейлора</u> в т. (x_0,y_0)

<u>Общий случай</u>: $f=f(x_1,\dots,x_n)$, $f\in C^\infty(G)$.

<u>Ряд Тейлора</u>:

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1\dots\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}f(x_0)\cdot(x-x_0)^\alpha$$

Если сходится к $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора в т. x_0

Еще одна полезная форма записи формулы Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left((x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+(x_n-x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x_0)$$

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x).$$

Задача 1. Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^5)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, функцию

$$f=\sin x\cdot \operatorname{sh} 2y$$

Решение. 1 способ. $f(0,0)=0$. Из всех вычисленных в т. $(0,0)$ производных до шестого порядка отличны от нуля только смешанные производные второго порядка и 2 смешанные производные четвертого порядка, причем

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=2;\quad \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^3\partial y}=-2;\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}=8.$$

Поэтому по формуле Маклорена:

$$f(x,y)=\frac{1}{2!}C_2^1\cdot 2\cdot xy+\frac{1}{4!}\left(C_4^1(-2)x^3y+C_4^3\,8\cdot xy^3\right)+o(\rho^5)$$

$$=2xy-\frac{1}{3}x^3y+\frac{4}{5}xy^3+o(\rho^5)$$

---

2 способ. Воспользовавшись разложениями по ф. Маклорена функций $\sin x$ и $\operatorname{sh}2y$:

$$f=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(2y+\frac{8y^3}{6}+o(y^4)\right)=$$

$$=2xy-\frac{1}{3}x^3y+\frac{4}{3}xy^3+o(\rho^5)$$

Задача 2. Разложить функцию $u(x,y)$ в окрестности т. $(2,0,1)$ в ряд Маклорена до $o(\rho^2)$, если u задана неявно уравнением

$$2x^2+2y^2+u^2-8xu-u+8=0 \qquad (1)$$

Решение (Задача 10 из примера

Коэффициенты найти $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$

Дифференцируем уравн. (1)

по x:
$$4x+2u\cdot u_x-8u-8xu_x-u_x=0 \qquad (2)$$

Выразим:
$$u_x=\frac{8u-4x}{2u-8x-1} \qquad (4)$$

по y:
$$4y+2u\cdot u_y-8x\cdot u_y-u_y=0 \qquad (3)$$

$$u_y=-\frac{4y}{2u-8x-1} \qquad (5)$$

Дифференцир. по x (2):
$$4+2u_x^2+2u\cdot u_{xx}-8u_x-8u_x-8xu_{xx}-u_{xx}=0$$

$$u_{xx}=\frac{8u_x-2u_x^2-4}{2u-8x-1} \qquad (6)$$

Дифференц. по y (3):
$$4+2u_y^2+2u\cdot u_{yy}-8x\cdot u_{yy}-u_{yy}=0$$

$$u_{yy}=-\frac{4+2u_y^2}{2u-8x-1} \qquad (7)$$

Дифференцируем (3) по x

$$2u_x \cdot u_y + 2u \cdot u_{yx} - 8u_y - 8x\, u_{yx} - u_{yx} = 0$$

$$u_{xy} = \frac{8u_y - 2u_x \cdot u_y}{2u - 8x - 1}. \quad (8)$$

Подставляем $(x, y, u) = (2, 0, 1)$ в (4) и (5) и в (6), (7), (8):

$u_x = 0, \ u_y = 0$;

$u_{xx} = \frac{4}{15}, \ u_{xy} = 0, \ u_{yy} = \frac{4}{15}$

Ответ: $u(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15}((x-2)^2 + y^2) + o(\rho^2)$.

Задача 3. Упростить выражение

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z,$$

считая x, y, z — малыми величинами

Решение: Используем ф. Маклорена для $\cos t$: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3)$, $\cos(x+y+z) = 1 - \frac{(x+y+z)^2}{2} + o(x+y+z)^3$

Подставим в формулу:

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2 -$$

$$-\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2}\right) + o(x^3 + y^3 + z^3) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - (xy + xz + yz) - 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)+\frac{1}{8}x^2y^2z^2+o(x^3+y^3+z^3)=$$

$$=-(xy+xz+yz)+o(\rho^3),\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ответ: $\cos(x+y+z)-\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=-(xy+xz+zy)+o(\rho^3)$

Задача 4. Разложить в ряд Маклорена

$$f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n.$$

Решение: $f(0,0)=1$, $f_x(0,0)=m$, $f_y(0,0)=n$

$f_{xx}(0,0)=m(m-1)$, $f_{xy}=m\cdot n$, $f_{yy}=n(n-1)$

и т.д.

$$f(x,y)=1+mx+n\cdot y+\frac{1}{2}\left(m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(m(m-1)(m-2)x^3+3\cdot m(m-1)n\,x^2y+3m\cdot n(n-1)xy^2+\right.$$

$$\left.+n(n-1)(n-2)y^3\right)+\ldots$$

Задача 5. В ряд Маклорена

$$f(x,y)=\ln(1+x+y)$$

Решение: Используем разл. для $\ln(1+t)$

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}x^my^{n-m}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^n(n-1)!}{m!(n-m)!}x^my^{n-m},\quad |x+y|<1.$$

Задача 6. В ряд Маклорена

$$f(x,y)=e^{x}\cdot\sin y$$

Решение:

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(0,0)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\cdot x^{m}\cdot x^{n-m}\cdot\frac{\partial^{n}f(0,0)}{\partial x^{m}\,\partial y^{n-m}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^{m}\cdot y^{n-m}}{m!\cdot(n-m)!}\cdot\frac{\partial^{n}f(0,0)}{\partial x^{m}\,\partial y^{n-m}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m}\cdot y^{k}}{m!\cdot k!}\,\frac{\partial^{m+k}f(0,0)}{\partial x^{m}\,\partial y^{k}}$$

положим $n-m=k$

В нашем случае

$$\frac{\partial^{m+k}f(x,y)}{\partial x^{m}\,\partial y^{k}}=\frac{\partial^{m+k}\left(e^{x}\sin y\right)}{\partial x^{m}\,\partial y^{k}}=e^{x}\cdot\sin\left(y+k\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда:
$$\frac{\partial^{m+k}f(0,0)}{\partial x^{m}\,\partial y^{k}}=\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{n}, & k=2n+1\\ 0, & k=2n\end{cases}$$

Подставляем и получаем:

$$e^{x}\sin y=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot x^{m}\cdot y^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!};\quad |x|,|y|<\infty.$$

Задача 7. В ряд Маклорена

$$f(x,y)=e^{x}\cdot\cos y.$$

Решение: Аналогично задаче 7.

$$\frac{\partial^{m+k} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^k} = e^x \cdot \cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right)$$

т.е. $$\frac{\partial^{m+k} f(0,0)}{\partial x^m \partial y^k} = \begin{cases} (-1)^n, & k = 2n \\ 0, & k = 2n+1 \end{cases}$$

Тогда:

$$e^x \cdot \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^m \cdot y^{2n}}{m!\,(2n)!}; \quad |x|, |y| < \infty$$

Задача 8. Разложить в ряд Маклорена

$$f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

Решение. Используем $\sin u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\sin(x^2+y^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Задача 9. Разложить в ряд Тейлора в точке $(1,1)$ $f(x,y) = e^{x+y}$

Решение:

$$f(x,y) = f(1,1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1,1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!\,(x-1)^m \cdot (y-1)^{n-m}}{m!\cdot(n-m)!} \cdot \frac{\partial^n f(1,1)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} =$$

Вводим $n - m = k$, $n = m + k$

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\cdot k!}\cdot\frac{\partial^{m+k}f(1,1)}{\partial x^m\partial y^k}$$

В нашем случае

$$\frac{\partial^{m+k}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^k}=\frac{\partial^{m+k}(e^x e^y)}{\partial x^m\partial x^k}=e^x\cdot e^y=e^{x+y}$$

В точке $(1,1)$ все они равны e^2, т.е.

$$f(x,y)=e^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\cdot k!}\;;|x|,|y|<1$$