

**Анализ 1-2 2021 Семинары 2-3**  
**Абсолютно и условно сходящиеся ряды.**

Домашнее задание.

**Задача 1.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ :

а)  $a_n = \frac{\sin(2n + \pi/4)}{n\sqrt[3]{n+2}}$ ; б)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ ; в)  $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ ; г)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$ .

**Задача 2.** Доказать, что ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin an}{n}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos an}{n}$  сходятся при любом  $a \in \mathbb{R}$ .

Следующая задача обобщает признаки Дирихле и Абеля без условия монотонности. Рассматривается ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ . Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

**Задача 3.** а) Пусть  $|S_n| \leq M$ , пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$  сходится абсолютно и  $b_n \rightarrow 0$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

б) Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$  сходится абсолютно. Тогда ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

**Задача 4.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ :

а)  $a_n = \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$ ; б)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^{1+1/n}}$ ; в)  $a_n = \operatorname{tg} \frac{(-1)^{n+1} \pi}{4n^p}$ , где  $p > 0$ .

**Задача 5.** Найти произведение рядов по формуле Коши:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ .