Анализ 1-2 2021 Семинары 7-8
Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.

Домашнее задание.

Задача 1. Доказать непрерывность суммы функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E: а) $u_n = \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n^4+x}},\ E=\mathbb{R}$; б) $u_n = \dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}},\ E=[\pi/3, 2\pi/3]$

Задача 2. Найти область E существования функции и исследовать ее на непрерывность: а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{n^2}$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\cos nx$; в) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

Задача 3. Обосновать возможность почленного дифференцирования рядов в указанной области: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n(n+1)},\ 0<x<2\pi$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\sqrt{n}x}{n^2+\cos\sqrt{n}x},\ 0<x<2\pi$.

Задача 4. С помощью почленного дифференцирования найти сумму следующего ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n,\ |x|<1$.

Задача 5. Показать, что последовательность $f_n = x^3 + \dfrac{1}{n}\sin n\,(x+\pi/2)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Задача 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-e^{-nx}}{x^2+n^3}\cos nx$.

Задача 7. Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$, бесконечно дифференцируема, и

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2}, \quad \forall x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f^n = Ce^x$, где $C=\text{const}$.