

Анализ 1-2 2021 Семинар 16
Определенный интеграл Римана.

Домашнее задание.

Задача 1. Вычислить определенные интегралы как предел интегральных сумм.

а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$; в) $\int_0^x \cos t dt$; г) $\int_0^x \frac{dx}{x}$.

Задача 2. Доказать, что если $f(x) \in C[0, 1]$, $f(x) > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

Задача 3. Доказать, что если функция $f(x)$ ограничена и выпукла вверх на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем и

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Задача 4. Доказать, что если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Задача 5. Найти интегралы.

а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$; б) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$; в) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$; г) $\int_0^2 \operatorname{sh}^3 dx$; д) $\int_3^4 \frac{x^2 + 3}{x-2} dx$.