

Анализ 1-2 2021 Семинар 17 – 18
Вычисления с использованием определенного интеграла.

Домашнее задание.

Задача 1. Найти пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Задача 2. Найти интегралы:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; б) $\int_0^e \sin \ln x \, dx$; в) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx$.

Задача 3. Доказать равенства:

а) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$; б) $\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{m+1}}$.

Задача 4. Вычислить производную по переменной x :

а) $\frac{d}{dx} \int_{\ln x}^{x^2} e^{-xt^2} \, dx$; б) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \arcsin(tx) \, dx$.

Задача 5. Найти площадь эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной аркой циклоиды:
 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Задача 7. Найти длину кардиоиды: $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Задача 8. найти длину кривой, заданной параметрически:
 $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Задача 9. найти длину дуги пространственной кривой:
 $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, $0 < t_1 \leq t \leq t_2$.