

Несобственный интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Домашнее задание.

**Задача 1.** Вычислить несобственные интегралы:

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} dx$ ; б)  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ ; в)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$ ; г)  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

**Задача 2.** Исследовать на сходимость:

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$ ; б)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ ; в)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ; г)  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \sin^2 x}$ .

**Задача 3.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра.

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x^3+1} dx$ ; б)  $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^\alpha} \sin x^3 dx$ ; в)  $\int_1^{+\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^\alpha}$ ;  
г)  $\int_0^{+\infty} \cos(x^{3/2} - \ln x) dx$ .

**Задача 4.** Доказать тождество:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{+\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx.$$

**Задача 5.** Найти интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} dx.$$

**Задача 6.** Доказать равенство:

$$\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - a^2} dx = \cos a \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

**Задача 7.** Вычислить интеграл  $\Phi(x)$  с помощью дифференцирования по параметру:

a)  $\Phi(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin x) dx$ ,  $y > 1$ ; б)  $\Phi(y) = \int_0^\pi \ln(1 - 2y \cos x + y^2) dx$ ;  
в)  $\Phi(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$ .

**Задача 8.** Доказать, что функция:

$$u(r) = \int_0^\pi e^{nr \cos \varphi} d\varphi$$

является решением уравнения

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - n^2 u = 0, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

**Задача 9.** Доказать, что функция:

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

является решением уравнения Бесселя

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - n^2) u = 0, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$