

Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Домашнее задание.

Задача 1. Доказать равномерную сходимость на множестве E_1 и неравномерную сходимость на множестве E_2 несобственных интегралов:

- а) $\int_1^2 (x-1)^{-\alpha} dx$, $E_1 = (-\infty, 0.99)$, $E_2 = (0, 1)$;
 б) $\int_0^{\infty} e^{-|\alpha-x|} dx$, $E_1 = (-\infty, 100)$, $E_2 = (1, \infty)$;
 в) $\int_0^{\infty} (\alpha^2 + x)e^{-\alpha x^2} dx$, $E_1 = (1, 2)$, $E_2 = (0, 2)$.

Задача 2. Исследовать на равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса:

- а) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin \alpha x dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2} dx$.

Задача 3. Исследовать на равномерную сходимость по признаку Дирихле:

- а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$, $\alpha \geq 0$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}(1 + \alpha x^2)} dx$, $\alpha \geq 0$.

Задача 4. Доказать неравномерную сходимость несобственного интеграла:

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0.$$

Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов.

Задача 5. Используя интеграл Дирихле, вычислить:

- а) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Задача 6. Найти с помощью дифференцирования по параметру:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx.$$

Задача 7. С помощью формулы $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$ вычислить

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^{n+1}} dx.$$

Задача 8. С помощью формулы $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$ доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Задача 9. Используя интеграл Пуассона, доказать, что:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/(4\alpha)}.$$