

Анализ 1-2 2021 Семинары 26–27
Дифференцирование отображений. Решение дифференциальных уравнений

Домашнее задание.

Задача 1. Найти матрицу Якоби и якобиан отображения. Где это отображение не вырождено?

$$\text{а) } \begin{cases} u = x(x^2 - 3y^2) \\ v = y(3x^2 - y^2) \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} u = \operatorname{ch} x \cos y \\ v = \operatorname{sh} x \sin y \end{cases}$$

Задача 2. Найти якобиан отображения:

$$\text{а) } \begin{cases} u = xyz \\ v = xy - xyz \\ w = y - xy \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} u = \frac{x}{\sqrt{1-r^2}} \\ v = \frac{y}{\sqrt{1-r^2}} \\ w = \frac{z}{\sqrt{1-r^2}} \end{cases}, \text{ где } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Задача 3. Решить уравнение, перейдя к полярным координатам:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение, перейдя к новым переменным:

$$\begin{aligned} \text{а) } & x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0, \quad u = x, \quad v = \frac{y}{x}; \\ \text{б) } & \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad u = x, \quad v = y - \alpha z, \quad \alpha = \operatorname{const}; \\ \text{в) } & x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \text{г) } & x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad x = ue^w, \quad y = ve^w, \quad z = we^w. \end{aligned}$$