

Анализ 1-2 2021 Семинары 28–29
Частные производные и дифференциалы старших порядков

Домашнее задание.

Задача 1. Найти 2-ой дифференциал функции f :

а) $f = e^{\frac{x^2}{y}}$; б) $f = \frac{2 - y - x^2}{2 + y - x^2}$; в) $f = (x + y)^{xy}$; г) $f = xy + yz + xz$.

Задача 2. Найти d^3f для функции $f = xyz$.

Задача 3. Доказать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$; б) $u = \operatorname{Re}(x + iy)^n$; в) $u = \operatorname{Im}(x + iy)^n$, $n \in \mathbb{Z}$;
г) $u = x \operatorname{ch} y \sin y + y \operatorname{sh} x \cos y$.

Задача 4. Доказать, что функция $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0.$$

Задача 5. Найти du и d^2u для функции $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = xy$, $\eta = x/y$.

Задача 6. Найти $d^n u$ для следующих функций:

а) $u = f(ax + by + cz)$; б) $u = f(a_1x + a_2y, b_1x + b_2y)$.

Задача 7. найти d^2z для функции, заданной неявно уравнением $z^3 + zx + zy = 3$ в точке $(1, 1, 1)$.

Задача 8. Доказать, что функция $u = xf(x + y) + yg(x + y)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Задача 9. Найти dz и d^2z для функции, заданной неявно уравнением

$$z - x = \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x}.$$

Задача 10. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

сделав в нем замену независимых переменных $\xi = xy$, $\eta = x/y$.