Анализ 2-2 2021 Семинары 21.
Метод Фурье в уравнении теплопроводности.
Комментарии, ответы, указания

Задача 1.
Решаем уравнение
$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in [0,\pi], t > 0,$$
с граничными условиями
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
и с начальным условием
$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,\pi].$$

Частное решение ищем в виде произведения $u(x,t) = Y(x)T(t)$. Подставляем в уравнение и разделяем переменные:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda$$

Если $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2$, то общее решение второго уравнения имеет вид $Y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, но граничные условия $Y(0) = Y(\pi) = 0$ влекут $A = B = 0$. Значит таких ненулевых решений при $\lambda > 0$ нет.

Если $\lambda = 0$, то $Y(x) = A + Bx$, и снова из граничных условий следует $A = B = 0$. Опять нет решений.

Поэтому λ отрицательно, $\lambda = -\mu^2$, общее решение имеет вид $Y(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$.

Из первого граничного условия следует, что $B = 0$, т.е., $Y(x) = \sin\mu x$, из второго граничного условия $\sin\mu\pi = 0$, т.е., $\mu = k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теперь решаем второе уравнение для функции $T(t)$, зависящей только от времени:

$$T'(t) = -k^2a^2T(t),$$

Общее решение $T(t) = b_k\exp(-a^2k^2t)$.

Решение уравнения теплопроводности с граничными условиями – суперпозиция частных решений
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-a^2k^2t}\sin kx.$$
В этой формуле b_k – произвольные коэффициенты, которые необходимо подобрать исходя из начального условия. Подстановка $t = 0$ дает

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

так что b_k – это коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, по ортогональной системе $\{\sin kx\}, k \in \mathbb{N}$
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin kx dx.$$

Для пункта а) $b_1 = 1$, и $b_k = 0$, при всех $k > 1$. Ответ:

$$u(t,x) = e^{-a^2 t} \sin x.$$

Для пункта б) находим коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos x - \cos 3x) \sin kx dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(k+1)x + \sin(k-1)x - \sin(k+3)x - \sin(k-3)x)\, dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(k+3)x}{k+3} + \frac{\cos(k-3)x}{k-3} - \frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right) \Big|_0^\pi = \\
&= \frac{4k}{\pi} \left(\frac{1}{k^2-1} - \frac{1}{k^2-9} \right)
\end{aligned}$$

если k четно и ноль в противном случае. При $k = 1, 3$ тоже нули. Ответ:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{\pi} \left(\frac{1}{4k^2-1} - \frac{1}{4k^2-9} \right) e^{-a^2 4k^2 t} \sin 2kx.$$

Найдем предельное распределение температуры, Переходя к пределу при $t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = u_\infty(x) = 0.$$

Что не удивительно, поскольку на концах поддерживается температура ноль. Все тепло уходит наружу.

Задача 2.

а) Решение $u(x,t) = x$. Находится подбором. Достаточно подставить в уравнение, граничные условия и начальные условия.

б) Решается аналогично задаче 1. Нужно разложить в ряд Фурье начальную функцию $\varphi(x) = x$:

$$\begin{aligned}
b_k &= 2 \int_0^1 x \sin k\pi x dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k}, \\
\varphi(x) &= \sum_{k=1}^\infty \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \pi k x.
\end{aligned}$$

А затем воспользоваться общей формулой для решения. Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} e^{-(k\pi a)^2 t} \sin \pi k x.$$

Отметим, что начальная функция $\varphi(x) = x$ не удовлетворяет нулевому граничному условию на правом конце. Тем не менее, эта формула дает решение задачи при

$t > 0$. Она удовлетворяет уравнению и граничным условиям при $t > 0$ и при всех $x \in [0, 1]$. (Здесь эта функция бесконечно гладкая! Объясните почему?) А при $t = 0$, как следует из теорем о точечной сходимости рядов Фурье, этот ряд сходится к x при $x \in [0, 1)$, а при $x = 1$, этот ряд сходится к $1/2$ (Почему?)

В итоге мы решили задачу всюду, кроме одной точки, в которой не выполнено ни граничное условие, ни начальное условие. Тем не менее, такие решения тоже допускаются, они называются обобщенными решениями.

в) В этом пункте требуется решить уравнение

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in [0,1],\ t > 0,$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 1,$$

и с нулевым начальным условием

$$u(x,0) = 0,\ x \in [0,\pi].$$

В этой задаче мы имеем дело с неоднородными (т.е., с ненулевыми) граничными условиями.

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ – некоторое частное решение этого уравнения с заданными неоднородными граничными условиями (не требуем выполнения начальных условий), которое находим, например, подбором. А $v(x,t)$ – решение уравнения с ОДНОРОДНЫМИ (т.е., с нулевыми) граничными условиями и с начальным условием $v(x,0) = \varphi(x) - u_0(x,0)$. Эту функцию уже честно находим по методу Фурье.

Итак, частное решение $u_0(x,t) = x$ мы уже нашли в пункте а). Осталось найти решение $v(x,t)$ однородной задачи с начальным условием $v(x,0) = 0 - x = -x$. Здесь поможет пункт б). Ответ:

$$u(x,t) = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} e^{-(k\pi a)^2 t} \sin \pi k x.$$

Как мы видим, это решение тоже обобщенное. Оно годится всюду кроме точки $x = 1$ при $t = 0$.

Задача 3.

Решаем уравнение

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in [0,l], t > 0,$$

с граничными условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

и с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l].$$

Необходимо повторить все шаги метода Фурье, применительно к новым граничным условиям.

а) В результате получится частные факторизованные решения вида

$$u(t,x) = e^{-a^2\mu_k^2 t}\cos\mu_k x,$$

где $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Вместо синусов будут косинусы и константа. Эти функции как раз удовлетворяют новому граничному условию. Напомним, что система $\{\cos\mu_k x\}$ является ортогональной и образует базис в $Ł_2(0,l)$.

б) Общее решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-a^2\mu_k^2 t}\cos\mu_k x$$

где

$$a_k = 2/l\int_0^l \varphi(x)\cos\mu_k x dx,\ k > 0, \qquad a_0 = 1/l\int_0^l \varphi(x)dx \quad -$$

коэффициенты разложения $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе $\cos\mu_k x$ на $[0,l]$.

в) Аналогично теореме 1 из лекции 12 доказывается утверждение: Пусть функция $\varphi(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,l]$, ее производная $\varphi'(x) \in L_2(0,l)$ и выполнено условие согласования $\varphi_x(0) = \varphi_x(l) = 0$. Тогда существует классическое решение этой задачи, представимое выписанным выше рядом с соответствующими коэффициентами. Это решение единственно.

г) Решается аналогично нулевым граничным условиям. Нужно в формулу для решения подставить выражения для коэффициентов Фурье и вынести интеграл и интегрируемую функцию $\varphi(x)$ за суммирование. Что останется и будет функцией Грина:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^l G(x,y,t)\varphi(y)dy,\ \text{где} \\ G(x,y,t) &= \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\mu_k x\cos\mu_k y e^{-a^2\mu_k^2 t}. \end{aligned}$$

Задача 4.

Воспользоваться задачей 3 и посчитать коэффициенты Фурье начального условия $\varphi(x) = \chi_{0,\pi/2}(x)$ – характеристическая функция интервала $[0,\pi/2]$. Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\cos(2n+1)\frac{\pi x}{l}.$$

Опять получается обобщенное решение. При $t = 0$ в точках $x = 0$, $x = \pi/2$ и $x = \pi$, где имеем скачки, сумма ряда равна $1/2$. Однако при $t > 0$ все гладко.

Переходим к пределу при $t \to +\infty$ и получаем предельное распределение температуры

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = u_\infty(x) = \frac{1}{2}.$$

По физическому смыслу это тоже объяснимо. Концы были теплоизолированы. Поэтому тепло из левой половины отрезка перетекло в правую половину и равномерно распределилось по всему отрезку. Температура уменьшилось от 1 до 1/2.

Заметим, что в этих граничных условиях действует закон сохранения тепла: для любых начальных условий

$$\int_0^l u(x,t)dx = const.$$

Попробуйте его доказать. Указание: проинтегрируйте уравнение по x.

Задача 5.

Решается также как и задачи 1 и 3. Решаем краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t),\ x \in [0,1], t > 0, \\ u(0,t) &= 0,\ u'_x(1,t) + cu(1,t) = 0,\ c > 0. \\ u(x,0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Частное решение ищем в виде произведения $u(x,t) = Y(x)T(t)$. Подставляем в уравнение и разделяем переменные:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda$$

Если $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, то общее решение второго уравнения имеет вид $Y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$.

Подставляем граничные условия: $A + B = 0$, $A\mu e^{\mu} - B\mu e^{-\mu} + c(Ae^{\mu} + Be^{-\mu}) = 0$. Откуда $A = -B = 0$ и $\mu = -c\frac{e^{2\mu}-1}{e^{2\mu}+1} < 0$, что не допускаем. Значит, положительных λ нет.

Если $\lambda = 0$, то $Y(x) = A + Bx$, и снова из граничных условий $A = 0$, $B + cB = 0$ $\Longrightarrow$ $B = 0$ так как $c > 0$. Опять нет решений.

Осталось найти отрицательные λ, $\lambda = -\mu^2$, общее решение имеет вид $Y(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$.

Из первого граничного условия следует, что $B = 0$, т.е., $Y(x) = \sin\mu x$, из второго граничного условия находим

$$\mu\cos\mu + c\sin\mu = 0,$$

что эквивалентно уравнению

$$\tan\mu = -\frac{\mu}{c}.$$

Построим графики левой и правой части и видим, что это уравнение имеет бесконечно много корней $\mu_k > 0$, причем $\mu_k \to +\infty$, Заметим, что $\mu_k \sim \pi k$, т.е., $\lim_{k\to\infty}\frac{\mu_k}{\pi k} = 1$.

Следовательно, $Y_k(x) = \sin\mu_k x$, $k \in \mathbb{N}$.

Частные факторизованные решения имеют вид

$$u_k(x,t) = e^{-a^2\mu_k^2 t}\sin\mu_k x$$

где μ_k – все положительные корни уравнения

$$\tan \mu_k = -\frac{\mu_k}{c}.$$

Проверим, что функции $\sin \mu_k x$ ортогональное семейство в $L_2(0,1)$. Если $\mu_k \neq \mu_n$, то

$$\int_0^1 \sin \mu_k x \sin \mu_n x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos\left(\mu_k - \mu_n\right) x - \cos\left(\mu_k + \mu_n\right) x dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\mu_k - \mu_n\right) x}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin\left(\mu_k + \mu_n\right) x}{\mu_k + \mu_n}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\mu_k - \mu_n\right)}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin\left(\mu_k + \mu_n\right)}{\mu_k + \mu_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \mu_k \cos \mu_n - \cos \mu_k \sin \mu_n}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin \mu_k \cos \mu_n + \cos \mu_k \sin \mu_n}{\mu_k + \mu_n}\right) =$$
$$= \frac{\mu_n \sin \mu_k \cos \mu_n - \mu_k \cos \mu_k \sin \mu_n}{\left(\mu_k - \mu_n\right)\left(\mu_k + \mu_n\right)} = \cos \mu_k \cos \mu_n \frac{\mu_n \tan \mu_k - \mu_k \tan \mu_n}{\left(\mu_k - \mu_n\right)\left(\mu_k + \mu_n\right)} =$$
$$= \cos \mu_k \cos \mu_n \frac{\mu_n \mu_k - \mu_k \mu_n}{c\left(\mu_k - \mu_n\right)\left(\mu_k + \mu_n\right)} = 0$$

Здесь в последней строке мы воспользовались уравнениями $\tan \mu_k = -\frac{\mu_k}{c}$ и $\mu_k = -\frac{\mu_k}{c}$.

Полноту этой системы доказывать сложнее. Она вытекает из общей теоремы о полноте собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, доказательство которой не входит в программу нашего курса. Ее можно найти в книге Шубина, см. список литературы.

Следующее замечание относится к возникающей здесь задаче Штурма-Лиувилля, которую будем скоро изучать подробнее.

Поскольку оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ симметричен на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'_x(1) + \alpha\varphi(1) = 0$, то, как мы уже доказали, собственные функции $Y_k(x) = \sin \mu_k x$ взаимно ортогональны в L_2. Норма

$$|f_k|^2 = \int_0^1 \sin^2 \mu_k(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\mu_k}{4\mu_k} = \frac{\mu_k^2 + c^2 + c}{2(\mu_k^2 + c^2)}.$$

Поэтому функция Грина этой задачи имеет следующий вид:

$$G(t,x,y) = 2\sum_{k>0} \frac{\mu_k^2 + c^2}{\mu_k^2 + c^2 + c} \sin \mu_k x \sin \mu_k y \, e^{-a^2 \mu_k^2 t}.$$