

Содержание курса лекций "Броуновское движение и стохастические дифференциальные уравнения"

Глинская Екатерина,

отдел теории случайных процессов, Институт математики НАН

Украины

glinkate@gmail.com

1. Броуновское движение

1.1. Броуновское движение: определение и основные свойства.

Броуновское движение как гауссовский процесс. Существование броуновского движения (проверка того, что его ковариационная функция неотрицательно определена). Свойства броуновского движения: независимость и стационарность приращений, конечномерные распределения, непрерывность траекторий, квадратическая вариация.

1.2. Броуновское движение как марковский процесс

Определение марковского свойства. Проверка марковского свойства для броуновского движения. Переходное ядро для марковского процесса и его свойства. Переходная плотность для броуновского движения. Уравнение теплопроводности.

1.3. Броуновское движение как мартингал

Определение мартингала. Примеры мартингалов, построенных по броуновскому движению. Теорема Дуба об остановке (доказательство для мартингала с дискретным временем). Применение мартингального свойства стохастической экспоненты для исследования первого момента выхода броуновского движения на уровень.

1.4. Интеграл Ито по броуновскому движению

Основные проблемы при определении интеграла по броуновскому движению. Интеграл от ступенчатых функций и его свойства. Изометрия Ито. Определение интеграла для прогрессивно измеримых процессов. Пример: интеграл Ито от броуновского движения

1.5. Свойства интеграла Ито. Формула Ито

Линейность интеграла. Марковское свойство интеграла Ито. Простая версия формулы Ито с доказательством

2. Стохастические дифференциальные уравнения

2.1. Стохастические дифференциальные уравнения: определения и примеры

Определение сильного решения. Определение единственности решения. Формула Ито для функции, зависящей от времени и решения СДУ. Примеры СДУ: коэффициенты не зависят от процесса, процесс Орнштейна-Уленбека, Стохастическая экспонента. Теорема о существовании и единственности сильного решения. Доказательство единственности.

2.2. Существование решения СДУ

Доказательство существования сильного решения СДУ: непрерывность интеграла Ито, неравенство Буркхольдера-Девиса-Ганди, квадратическая вариация интеграла Ито. Непрерывная зависимость решения СДУ от начального условия.

2.3. Решение СДУ как марковский процесс

Переходная вероятность для решения СДУ. Однородные по времени СДУ. Связь с уравнениями в частных производных: переходная полугруппа для решения СДУ, генератор полугруппы.

2.4. Слабые решения для СДУ

Характеризация Леви броуновского движения. Пример Х. Танака: существование слабого решения, отсутствие сильного решения. Определение слабого решения СДУ.

2.5. Преобразования СДУ и их применения

Преобразование для диффузионного коэффициента. Теорема сравнения для СДУ с единичной диффузией. Преобразование для уничтожения коэффициента сноса. Применение для исследования момента выхода решения СДУ на уровень.