

Алгебры и σ -алгебры множеств

① Теория меры. Мера отображение множества множества на реальных, положительных группы на плоскости, объем тела в пространстве. Мера - неотрицательная величина, обладающая свойством аддитивности: $\forall A, B, A \cap B = \emptyset$

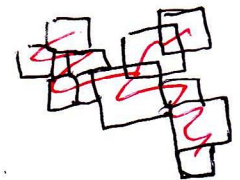
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Например: мера Жордана (возможна) объем этих свойств мн.
Однако множество, измеримых по Жордану, нам мало. Хотим расширить класс множеств, измеримых мерой.
Для этого нужна теория меры? Для

построения хорошей теории интеграла.
Интеграл Римана недостаточно хорош.
Множество интегрируемых по Риману функций.
Будем считать интеграл Лебега.

Применение: мат. анализ, теория вероятностей, математическая физика, пространства Соболева, отображения функций.

② Множество точек $\mathbb{R}^2$
Определение. Две точки $\mathbb{R}^2$. Множество
 $A \subset \mathbb{R}^2$ имеет точку x , если $\forall \varepsilon > 0$
 найдется точка y в A , такая что $|x - y| < \varepsilon$
 $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, Δ_k - квадрат
 со стороной a_k $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon$.



Аналогично для $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$
Примеры множеств

- а) Любое конечное или счетное множество
 например $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- б) Канторово множество на $\mathbb{R}$
 $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$
 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$
 $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$
 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$
 Примеры множеств, не имеющих точки.
 а) квадрат, вписанный в $[0, 1]$
 б) угловатая кривая на $[0, 1]$

Вопрос: кривая на $[0, 1]$, т.е. отображение $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,
 непрерывное отображение $\gamma = \{\gamma(t), t \in [0, 1]\}$
 $\gamma(t) \in C[0, 1]$, $\gamma = \{\gamma(t), t \in [0, 1]\}$
 имеет ли длина? $\gamma \in C^1[0, 1]$ или $\gamma \in C[0, 1]$?
Ответ: Если $\gamma \in C^1[0, 1]$, то $\gamma \in C^1[0, 1]$.
 Но может и нет: кривая Давид,
 которая не имеет длины.

③ Алгебра множеств

X - базовое множество, $\mathcal{A}$ - система подмножеств X : $\mathcal{A} \subset 2^X$

$\mathcal{A}$ - называется алгеброй множеств, если:

- 1) $X \in \mathcal{A}$ (называемая функцией алгебры)
- 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\emptyset \in \mathcal{A}$ нуль алгебры)

$$3) A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$$

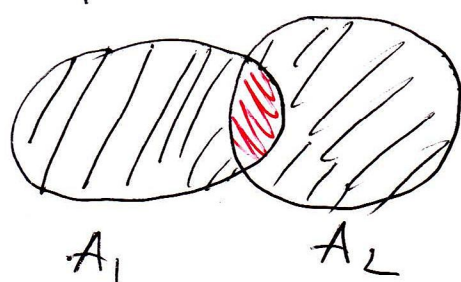
Лемма 1: $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

В самом деле: $A_1 \cup A_2 = \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}$

т.к. $\overline{A} = X \setminus A$.

Определение 2. Симметрическая разность:

$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$$



$$A_1 \Delta A_2 ; A \Delta A = \emptyset$$

Лемма 2. $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \Delta A_2 \in \mathcal{A}$

Симметрическая разность - аналог рассуждения, т.к. $A \Delta B = B \Delta A$,
 $A \Delta A = \emptyset$ (нуль).

"Исправлено Тейлоринка":

$\forall A, B, C$

$$A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$$

Доказательство: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$$A \setminus B \subseteq \underline{(A \setminus C)} \cup \underline{(C \setminus B)} \Rightarrow$$

$$B \setminus A \subseteq \underline{(B \setminus C)} \cup \underline{(C \setminus A)}$$

$$A \Delta B \subseteq \underline{(A \Delta C)} \cup \underline{(B \Delta C)}$$

Вопрос: Почему называется алгеброй?

Пусть X - базовое множество
 $\forall A \subseteq X \rightarrow \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Рассмотрим в пространстве функций на A
 операции сложения и умножения по
 модулю 2, т.е. р-м со значениями в $\mathbb{F}_2$.

Тогда: $\chi_X \equiv 1$, $\chi_\emptyset \equiv 0$.

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B \quad (\text{по модулю } 2)$$

Значит. Система множеств $\{A \subseteq X$
 является алгеброй $\Leftrightarrow \{\chi_A\}$ - образует алгебру.

- 5 -

Задача 2. Показать $\chi_{A \cup B}; \chi_{A \setminus B}$

Решение: $\chi_{X \setminus A} = 1 + \chi_A$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A + \chi_A \cdot \chi_B.$$

Задача 3. Показать, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения и пересечения, является алгеброй.
($X \subset A$)

Решение: Пример: $X = \{a, b, c\}$

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$$

Хорошие операции: пересечение и симметрическая разность. Тогда будет алгеброй.

Примеры Алгебр множеств

Пр 1. $A = \{\emptyset, X\}$ минимальная алгебра

Пр 2. $A = 2^X$, все подмножества максимальная алгебра

Определение 3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ таковы, что $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$. Тогда $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ наз. разложением объединением.

Пр. 3. Пусть $X = \bigsqcup_{i=1}^3 A_i$

$A = \{ \emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \sqcup A_2, A_2 \sqcup A_3, A_1 \sqcup A_3, X \}$
образует алгебру. Это минимальная алгебра, которая содержит A_1, A_2, A_3 .
Аналогично строится минимальная алгебра, если $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Пр. 4. Пусть X - любое бесконечное м. б. $A : \{ X, \forall A \text{ таковы, что либо } A \text{ - конечно, либо } X - A \text{ - конечно} \}$

Проверять, что это алгебра.

$$\text{Если } A \in A \Rightarrow X - A \in A.$$

$$\text{Если } A, B \in A \Rightarrow A \cap B \in A.$$

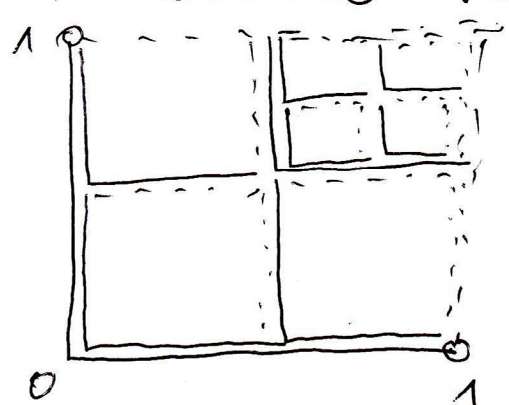
Пр. 5. $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ Понимать.

Разбиваем на конечно много подмножеств:
 $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_4 \end{bmatrix}$

Тогда A - это минимальная анкета,
состоящая из $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е.

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ гомометрическое } \underline{\text{мн}}.$$

Аналогично на плоскости $\mathbb{R}^2$:



Такие минимальные
представления
их можно найти.
открыта анкета

Базисный принцип. Пусть $X = [0,1] \times [0,1]$

были отрезками $\{a, b\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$
применимы, когда известны a и b или
применимы, или не применимы, т.е.
 $\{ \in \{ [,] \}, \text{ т.е. } [a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b].$

Определение 4: Множество $E \subset X$ называется
элементарным, если оно есть
отрезком или пересечением
 $E_i = \{a_i, b_i\} \times \{c_i, d_i\}$

$$E = \bigcup_{i=1} E_i$$

Тогда элементарные множества откры-
ты анкетой. Утверждение если



Определение 5. Пусть $X = [0, 1] \times [0, 1]$

Множество A измеримо по Жордану, если его граница ∂A имеет меру нуль

т.е. ее можно покрыть конечным набором интервалов, сумма длин меньшей суммарной длины (∂A - замкнутое м.в.)

Задание 4. Измеримые по Жордану м.в. на X образуют алгебру

Решение: $X \in A$; $\partial(A_1 \cup A_2) = \partial A_1 \cup \partial A_2$

$$\partial(X \setminus A) = \partial(A)$$

Задание 5. Пусть A_1 и A_2 - две алгебры на множестве X . Доказать, что $A_1 \cap A_2$ - тоже алгебра.

Решение: очевидно проверяется.

Конструкция алгебры.

Пусть $\Phi \subset 2^X$ - любой набор множеств из X

Определение 6. $A_\Phi = \bigcap \{A : \Phi \subset A$;
 A - алгебра $\}$

т.е. пересечение всех идеалов, содержащих Φ . Называется: минимальный идеал, порождаемый Φ .
Всегда есть идеал $\mathbb{Z}^X$, содержащий Φ .

В примерах 3 и 5 как бы были такие идеалы порождаемые группами над группой $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Пример 6. Пусть $\Phi = \{[a, b], a < b\}$
 $0 \leq a < b < 1$

Тогда $A_\Phi = \{\text{отрезки конечного числа непересекающихся полуоткрытых}\}$

Это не совпадает с идеалами Зигмунда-Харди-Литтлвуда, которые порождаются интервалами $[a, b],]a, b[,]a, b], [a, b[$.
т.е. является подидеалом этого идеала

Самостоятельная работа

Задача 1. Описать все элементы
множества $X = \{a, b, c\}$.

Задача 2. Доказать арифметическое

высказывание:

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

Задача 3. Привести пример отображения множества на $[0, 1]$, не удовлетворяющего условию Хордана.

Домашнее задание

Задача 1. Описать все алгебры для множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

Задача 2. Доказать алгебраические тождества:

$$1) (A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cap (A_2 \Delta B_2)$$
$$(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \setminus (A_2 \Delta B_2)$$

Задача 3. Привести пример открытого множества на плоскости, не измеримого по Жордану.