

ε -аналитичность множеств

① Разбор задачи 3 из сам. работы.
Задача. Привести пример открытого множества на $[0, 1]$, которое не измеримо по Жордану.

Решение. Рассмотрим счетное мн-во
 $Q \cap [0, 1] = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\frac{\varepsilon}{2^k}}(r_k)$$

Это мн-во открытое, как объединение открытых множеств. Найдем по формуле.

Утв. $\partial U = \overline{U} = [0, 1] \setminus U$ — замкнутое.

Действительно, т.к. $Q \cap [0, 1]$ — счетно, то $\forall x \in [0, 1] \setminus U \quad \forall U(x) \exists r_k \in U(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \partial U$. И обратно, если $x \in \partial U \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin U \Rightarrow x \in [0, 1] \setminus U$.

Утв. Если U — измеримо по Жордану, то

$$J^*(U) \leq \sum_{k=1}^{\infty} J^*(U_{\frac{\varepsilon}{2^k}}(r_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

т.е. U — измеримо по Жордану, но $[0, 1] \setminus U$ тоже измеримо по Жордану, и против.

$$1 = \mu([0, 1]) = \mu(U \cup [0, 1] \setminus U) = \mu(U \cup \partial U) = \mu(U) + \mu(\partial U) \Rightarrow \mu(\partial U) = 1 - \mu(U) \geq 1 - \varepsilon$$

т.е. при $\varepsilon < 1$, $\mu(\partial U) \neq 0$.

Следовательно, U не измеримо по Хоргану

Напомним определение алгебры мн. в X -базовое мн. в, $A \subseteq 2^X$

Аксиомы: 1) $X \in A$; 2) $A \in A \Rightarrow X \setminus A \in A$;
3) $A, B \in A \Rightarrow A \cap B \in A$

Установим: $A \cup B \in A$, $A \Delta B \in A$.

Задан 0. Пусть A - алгебра, $A_k \in A, k=1, 2, \dots$
Построим последовательность $B_k \in A$, такую
что $B_k \subseteq A_k, k=1, 2, \dots$; $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$

т.е. $A_k \cap A_j = \emptyset$.

Решение: Строим конструктивно по $\{A_k\}$

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus B_1, B_3 = A_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$$

и т.д., $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$

тогда: $B_k \subseteq A_k$ - очевидно,

$B_k \cap B_j = \emptyset \quad \forall j < k$ - тоже очевидно.

т.е. B_k образуют попарно непересекающееся объединение

Проверим, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Включение $\supseteq$ очевидно, но построим

Проверим $\subseteq$.

Пусть $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Обозначим n - наименьшее натуральное число такое, что

$x \in A_n$, $x \notin A_{n-1}$. Тогда $x \in B_n$

Значит $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$

② σ -алгебры множеств

Определение: Пусть X - множество, Σ - алгебра на X называемая σ -алгеброй, если $\forall \{A_k\}, A_k \in \Sigma$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Свойства: $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

σ -алгебра замкнута относительно объединения и пересечения множеств.

Вопрос: Какие из рассматриваемых ранее алгебр являются σ -алгебрами?

Пример 0. $\Sigma = \{\emptyset, X\}$, $\Sigma = 2^X$
 $\Delta A!$ является.

Пример 1. X - конечное мн-во. Тогда $\forall$ алгебра естественна σ -алгебра.

Пример 2. $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$, A_k - попарно

Тогда порожденная алгебра естественна σ -алгебра.

Пример 3. X - бесконечно, $\mathcal{A} = \begin{cases} A - \text{конечно} \\ \text{или} \\ X - A - \text{конечно} \end{cases}$

Отвеч: НЕТ. Это не σ -алгебра.

Почему?

Как построить алгебру σ -алгебры?

Пример 4. $\Sigma = \begin{cases} A - \text{не более чем счетно} \\ \text{или} \\ X - A - \text{не более чем счетно} \end{cases}$

Это σ -алгебра. Почему?

Пример 5. На квадрате $[0,1] \times [0,1]$

рассмотрим алгебру элементарных множеств (порожденных прямоугольными, замкнутыми и не замкнутыми).

Это тоже не σ -алгебра. Можно привести кривую (открытую).

Пример 6. А метрические пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$.
Хоффман универсальность (на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2$).

Отвечая: НЕТ! Обусловленные разбиениями
иных метр: $Q \cap [0, 1]$ - не универсально
на Хоффман, каждая точка - универсальна

Пример 7. $X = [0, 1]$

$$\Phi = \{ [a, b), 0 \leq a < b < 1 \}$$

Рассмотрим $\mathcal{A}_\Phi$. Это алгебра, но
не σ -алгебра. Почему?

Отвечая: можно возводить интервалы
 $0 < a < b < 1$

$$(a, b), \quad (a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b), \quad a + \frac{1}{n_0} < b,$$

Задача 1. а) Пусть Σ_1 и Σ_2 - σ -алгебры.

Тогда $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ - тоже σ -алгебра.

б) Σ_i - σ -алгебры, $i \in \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ - любое множество индексов (счетное или несчетное)

Тогда $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} \Sigma_i$ - тоже σ -алгебра.

- 6 -

Конструкция совершенных σ -алгебр

Пусть $\Phi \subset 2^X$ - произвольное семейство множеств.

σ -алгебра, совершенная относительно Φ :

$$\Sigma_\Phi = \bigcap \{ \Sigma - \sigma\text{-алгебра, } \Phi \subset \Sigma \}$$

это наименьшая σ -алгебра, содержащая Φ .

③ Борелевские σ -алгебры

Пусть X - любое топологическое пространство. Напримр X - подмножество $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой топологией.

Определение: Борелевский σ -алгебра на топологическом X называется σ -алгебра, совершенная относительно Φ всех открытых множеств. Обозначается $\mathcal{B}$.

Лемма 2. (Из 1 по курсу) Любое открытое множество в $\mathbb{R}$ есть не более чем счетное объединение непересекающихся интервалов (a, b) и, возможно, одного или двух краев $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$.

Задача 3. Борелевская σ -алгебра на $\mathbb{R}$
 порождается $\Phi = \{ (a, b), a < b \}$:

$$\mathcal{B} = \Sigma \Phi$$

Задача 4. Чем порождается борелевская
 σ -алгебра на $\mathbb{R}^n$?

Ответ: $\Phi = \{ B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r > 0 \}$.
(Можно брать $r \in \mathbb{Q}$, $x \in K$ - всевозможные
любое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество есть об-
(открытое) σ -замкнутые таких открытых шаров.

Задача 5. Борелевская σ -алгебра поро-
ждается всеми замкнутыми мно-
жествами.

Решение: U -открыто $\Leftrightarrow X \setminus U$ -замкнуто

Задача 6. Доказать, что борелевская
 σ -алгебра на $\mathbb{R}$ порождается:
а) системой всех интервалов; б) системой
всех отрезков; в) системой всех μ -
(открытых или замкнутых;
г) системой полуинтервалов $[a, b)$.

Получается одна и та же σ -алгебра.

Задача 7. Доказать, что борелевская σ -алгебра на плоскости $\mathbb{R}^2$ порождается семейством всех квадратов (открытых или замкнутых).

Задача 8. Верно ли, что борелевская σ -алгебра на плоскости порождается всеми компактными множествами?

Решение: В подобных задачах необходимо представить σ -алгебру, которая содержит данное множество и которая не совпадает с заданной σ -алгеброй.

Пусть: $\Sigma' = \{ B \subset \mathbb{R}^2, B \text{ — сетка, или } \mathbb{R}^2 \setminus B \text{ — сетка} \}$

Тогда Σ' — это σ -алгебра, она, очевидно, не совпадает с борелевской σ -алгеброй на плоскости.

Задача 9. Верно ли, что борелевская σ -алгебра порождается всеми компактными множествами меры нуль?

Решение: Представим σ -алгебру Σ' .

$\Sigma' = \{ B : \mu(B) = 0 \text{ или } \mu(X \setminus B) = 0 \}$

-9-

Задача 10. Доказать, что любое замкнутое мн-во в $\mathbb{R}^n$ есть пересечение некоторого числа открытых множеств.

Решение: Пусть K - замкнутое мн-во.
Рассмотрим $\bigcup_{x \in K} U_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(K)$ - ε -окрестность K . Оно открыто. Проверить, что

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}(K).$$

Отсюда рассуждать аналогично для K -открытого и неограничено.

(4) Конструкция δ -алгебр.

1) Произведение δ -алгебр.

Дано: (X_1, Σ_1) и (X_2, Σ_2) - δ -алгебры

Определение произведение $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$

$$\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \Sigma_\Phi, \quad \Phi = \{A_1 \times A_2, A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2\}$$

Заметим, что Φ - δ -алгебра.

Пример $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, Σ_1, Σ_2 - борелевские δ -алгебры. Тогда $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ - борелевские δ -алгебры на $\mathbb{R}^2$.

-10-

Вопрос. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - сюръективное отображение, Σ - σ -алгебра в X . Верно ли, что $f(\Sigma)$ - это σ -алгебра в Y ?

Ответ: НЕТ!

Пример: $X = \{a, b, c\}$

$\Sigma_X = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b, c\}\}$

$Y = \{A, B\}$, $f: X \rightarrow Y$

$f(a) = A$, $f(b) = A$, $f(c) = B$.

Тогда $f(\Sigma) = \{\emptyset, \{A, B\}, \{A\}\}$.
Ясно, что это не σ -алгебра (нет $\{B\}$).

2. Пробраз σ -алгебры.

X, Y - множества, $f: X \rightarrow Y$

Определение: Пробраз точки $y \in Y$:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X: f(x) = y\}.$$

Пробраз множества $B \subseteq Y$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}.$$

Пробраз семейства множеств $\Phi \subseteq 2^Y$

$$f^{-1}(\Phi) = \{A \in 2^X: A = f^{-1}(B), B \in \Phi\}$$

- 11 -

Задача 11. а) Пусть A - множество в Y .
Тогда $f^{-1}(A)$ - множество в X .

б) Пусть Σ - σ -алгебра в Y .
Тогда $f^{-1}(\Sigma)$ - σ -алгебра в X .

Решение: Вытекаем из свойств

соотношений:

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset; \quad f^{-1}(Y) = X$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

Теорема (лемма) Пусть $\Phi \subseteq Y$.

Рассмотрим минимальную σ -алгебру $\Sigma \Phi$ в Y , порожденную Φ .

$$\text{Тогда } \Sigma f^{-1}(\Phi) = f^{-1}(\Sigma \Phi)$$

Самостоятельная работа

Задача 1. Доказать, что любая бесконечная δ -сетка евклидова не менее чем континуальна, т.е., она несчетна.

Задача 2 Доказать, что множество $I \cap [0, 1]$ всех иррациональных чисел на $[0, 1]$ евклидово борелевским

Задача 3. Верно ли, что борелевская δ -сетка на пространстве $\mathbb{R}^2$ порождается всеми открытыми множествами, симметричными относительно оси OY ?

Домашнее задание

Задача 1. Могут ли два класса множеств Φ_1 и Φ_2 без общих элементов порождать одну и ту же σ -алгебру?

Задача 2. Доказать, что всякая σ -алгебра в IN порождается конечными или счетными разбиениями IN на дизъюнктные части.

Задача 3. Доказать, что множество $\mathcal{A}$ является борелевским множеством тогда и только тогда, когда отображение χ_A является борелевским отображением.

(Указание: использовать теорему о непрерывности функции)

Задача 4. Доказать, что отображение $x \rightarrow \sin x$ отображает $[0, 2\pi]$ в $[-1, 1]$ и превращает борелевские множества в борелевские.