

Мера

Определение 1. Мера — это неотрицательная функция, заданная на алгебре множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$.

Мера называется конечно-аддитивной, если

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

$A \sqcup B$ — обозначает дисъюнктное объединение, т.е. $A \cap B = \emptyset$.

Основные свойства меры

$$1) A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$$

$$2) B \subseteq A \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$$

$$\text{В частности, если } \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0.$$

$$3) \mu(A) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(B) \quad \forall B \in \mathcal{A} \\ \mu(B \setminus A) &= \mu(B) \end{aligned}$$

$$4) \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

$$5) \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \quad \text{конечная субаддитивность.}$$

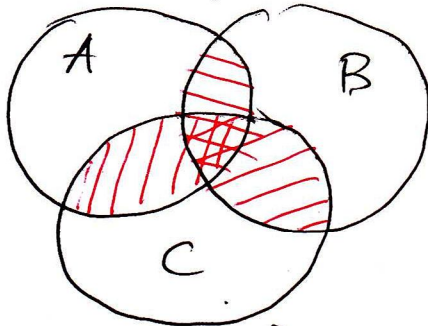
$$6) \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k), \quad \forall A_k \in \mathcal{A}.$$

$$7) \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k), \quad \forall A_k \in \mathcal{A}.$$

Задача 1. Докажем, что

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$$

Решение:



Обозначения: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой. X - мн-во, $\mathcal{A}$ - алгебра на X , μ - мера на $\mathcal{A}$.

Примеры мер.

① Мера Жордана. Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра множеств, измеримых по Жордану, из $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0$.

Рассмотрим случай $n=1$, $X=[0, 1]$.

Пусть A - измеримо по Жордану.

Определение 2

$$\mu_J(A) = \int \chi_A(x) dx,$$

где $\chi_A(x)$ - характеристическая ф-я A ,

интеграл по Риману:

A - измеримо по Жордану $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu(\{x : \chi_A \text{ - разрывна в т. } x\}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi_A$ - интегрируема по Риману.

Проверим конечно аддитивность:

$$A \sqcup B \Rightarrow \chi_{A \sqcup B} = \chi_A + \chi_B \Rightarrow$$

$$\mu_J(A \sqcup B) = \int_0^1 \chi_{A \sqcup B}(x) dx = \int_0^1 (\chi_A(x) + \chi_B(x)) dx =$$

$$= \int_0^1 \chi_A(x) dx + \int_0^1 \chi_B(x) dx = \mu_J(A) + \mu_J(B)$$

Обобщение этого примера

Пусть на $[0, 1]$ задана непрерывная функция $p(x) \in C[0, 1]$, $p(x) \geq 0 \forall x \in [0, 1]$

$$\mu_p(A) = \int_0^1 p(x) \chi_A(x) dx$$

Очевидно, что конечно аддитивная мера. Физический смысл $p(x)$ - плотность на отрезке $[0, 1]$. Интеграл - масса на отрезке.

② Вероятностная мера. X - конечное мн-во

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A = \mathcal{Q}^X$,
заданы такие $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$

$$\mu(A) = \sum_{x_k \in A} p_k$$

Говорят: A - это событие, $\mu(A)$ - вероятность события A .

Например: бросание игральной кости.
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p_k = 1/6$, A - выпало четное число.

③ Обобщение примера с конечным множеством: $X = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, $p(A_k) = p_k \geq 0$.

④ Подпространство и пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - заданное пр-во с мерой

Пусть $Y \in \mathcal{A}$, $Y \subseteq X$

$$\mathcal{A}_Y = \{A : A \in \mathcal{A}, A \subseteq Y\} = \mathcal{A} \cap Y$$

$$\mu(A) = \mu(A \cap Y)$$

$(Y, \mathcal{A}_Y, \mu)$ - подпространство.

Определение 3. Пусть на алгебре $\mathcal{A}$ задана (аддитивная) мера μ . Она называется сечно-аддитивной, если $\forall \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \text{ т.е. } \text{гипотеза таких наборов}$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Для простоты считаем, что $\mu(X) < \infty$, т.е. μ - конечная мера. Но можно рассмотреть сечно-конечные меры, т.е., когда

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k, \mu(A_k) < \infty$$

тогда $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap A_k)$.

Продолжаем примеры.

① Мера Жордана на алгебре элементарных множеств является счётно-аддитивной. Это будет доказано в лекции. Это важный результат будет использован при построении меры Лебега.

② Вероятностная мера на счётном вероятностном пространстве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$
 $A = 2^X$, $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

$$\mu(A) = \sum_{x_k \in A} p_k$$

Является, очевидно, счётно-аддитивной

③ Мера Дирака (δ -мера)
 X - произвольный, A - алгебра (или σ -алгебра)

$$\text{Пусть } x_0 \in X \quad \mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

Является счётно-аддитивной.

④ Считающая мера. X - любое, $A = 2^X$
 $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$, $\mu(A) = \begin{cases} \#A, & A \text{ конечно} \\ \infty, & A \text{ бесконечно} \end{cases}$
Является счётно-аддитивной.

- 6 -

⑤ Обобщение ситаронизации меры

Задана функция $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $A = 2^X$

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \rho(x) := \sup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ - конечно}}} \sum_{x \in B} \rho(x)$$

Мера является счетно-аддитивной.
Задача 2. При каких условиях эта мера является конечной

Решение: Необходимое и достат. условие:

Множество ненулевых значений ρ является не более чем счетным и сумма значений ρ в этом множестве - конечно

Пусть μ - конечно, тогда $\forall \varepsilon > 0$ множество $\{x \in X : \rho(x) > \varepsilon\}$ конечно.

Отсюда следует, что множество $A = \{x \in X : \rho(x) > 0\}$ не более чем счетно

т.е. $A = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\rho(x_k) > 0$.

Тогда, очевидно $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) < \infty$.

В обратную сторону очевидно. $\square$

⑥ Привести пример аддитивной, но не счетно-аддитивной меры.

Пусть X - любое бесконечное мн-во

$\mathcal{A} = \{ A \subset X, A \text{ конечно, или } X \setminus A \text{ конечно} \}$
это алгебра. (не σ -алгебра)

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ конечно} \\ 1 & A \text{ бесконечно} \end{cases}$$

Легко проверить, что эта мера аддитивна,
но не счетно аддитивна. Возьмем A -счетное
мн-во $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, $A_k = \{x_k\}$.

$$\text{Тогда } \mu(A_k) = 0, \mu(A) = 1, A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Еще один интересный пример.
Рассмотрим семейство множеств

$$\Phi = \{ A : x \in \xi \alpha, \beta \xi \cap Q, 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1 \}$$

где α и β - любые действительные числа, $\xi \in [1, 2]$
Рассмотрим соответствующую алгебру $\mathcal{A}_\Phi$.
Рассмотрим меру на Φ .

$$\mu(A) = \beta - \alpha.$$

Легко видеть, что алгебра $\mathcal{A}$ состоит из A :
объединения конечного числа непересекаю-
щихся $\xi \alpha_k, \beta_k \xi, 0 \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq 1$

Мера этого множества равна

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k)$$

Эта мера σ -аддитивна, но не сепарабельна.
 Односторонние разноточные множества
 принадлежат алгебре $\mathcal{A}$, имеют меру 0.
 Любое грубое множество состоит из беско-
 нечно малых разноточных толк и имеет
 положительную меру.

Задача 3 Пусть μ - σ -аддитивная мера
 на алгебре $\mathcal{A}$.

Доказать, что μ является сепарабельной
 если и только если $\forall$ множеств
 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ и для любого $A \in \mathcal{A}$.

Из того, что $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ следует, что

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

т.е. из сепарабельности следует
 сепарабельность.

Решение $\Rightarrow$ очевидно, если $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

$\Leftarrow$ Пусть $\mathcal{A}$ сепарабельна, то
 нет сепарабельности, т.е.

$$\exists B_k \in \mathcal{A}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A, \quad \text{и при этом}$$

$$\mu(A) < \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k). \quad (*)$$

Заметим, что $\bigcup_{k=1}^n B_k \subseteq A$

Поэтому в силу конечной σ -аддитивности меры

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \leq \mu(A)$$

$$\sum_{k=1}^n \mu(B_k) \leq \mu(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \mu(A) \quad \text{Противоречие (*)}$$

Задача 4 Пусть μ — сепарабельная мера в алгебре A . Доказать, что если последовательность множеств $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$ является монотонной (т.е. $A_k \subseteq A_{k+1}$ или $A_k \supseteq A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k), \text{ где}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{при } A_k \subseteq A_{k+1} \text{ (возрастание)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{при } A_k \supseteq A_{k+1} \text{ (убывание)}$$

Решение. Докажем сначала возрастающую убывающую последовательность множеств $X \setminus A_k$.

$$\text{Итак, пусть } A_k \subseteq A_{k+1}, \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\text{Тогда } A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots \cup (A_{k+1} \setminus A_k) \cup \dots$$

$$= A_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k) \quad \text{Тогда, в силу}$$

свойство аддитивности меры μ

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{k+1} \setminus A_k), \text{ т.е.}$$

по определению суммы ряда

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_{k+1} \setminus A_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_{k+1}) - \mu(A_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \mu(A_3) - \mu(A_2) + \dots \\ &+ \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n), \text{ т.е.} \\ \mu(A) &= \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \quad \square \end{aligned}$$

Это свойство называется
непрерывностью меры

Домашнее задание

Задание 1. Пусть A_1 — это алгебра полуинтервалов $[a, b)$ на $[0, 1)$, т.е. $A_1 = A_\Phi$, где $\Phi = \{[a, b) \subset [0, 1)\}$, ~~и~~

Пусть на A_1 задана счетно аддитивная мера μ . Рассмотрим функцию

$$g_\mu(x) = \mu([0, x]), \text{ при } x \in [0, 1]$$

Доказать, что $g_\mu(x)$ — непрерывная функция, которая непрерывна слева в каждой точке $x \in [0, 1]$.

Задание 2. Пусть задана непрерывная функция $g(x)$, $x \in [0, 1]$, $g(x) \geq 0$, причем $g(x)$ — непрерывна слева.

Рассмотрим меру $\mu(A) = g(b) - g(a)$,
 $A = [a, b)$

Доказать, что μ — счетно аддитивная мера на A_1 .