

Мера (критерий)

① Дом задание

Задача 1 Пусть $A_1 = A_\Phi$, где $X = [0, 1)$ $\Phi = \{ [a, b) \subset [0, 1), a, b \in \mathbb{R} \}$ Пусть на A_1 задана счетноаддитивная мера μ . Рассмотрим функцию

$$g_\mu(x) = \mu([0, x)), \quad x \in [0, 1]$$

Доказать, что $g_\mu(x)$ - непрерывная функция, непрерывная слева $\forall x \in [0, 1]$ Решение: Непрерывность следует из монотонности меры:

$$\text{Если } x_1 \leq x_2 \text{ то } [0, x_1) \subseteq [0, x_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow g_\mu(x_1) = \mu([0, x_1)) \leq \mu([0, x_2)) = g_\mu(x_2)$$

Проверим непрерывность слева, т.е.

$$\forall x_0 \in [0, 1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} g_\mu(x) = g_\mu(x_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad g_\mu(x_0) - g_\mu(x_0 - \varepsilon) =$$

$$= \mu([0, x_0)) - \mu([0, x_0 - \varepsilon)) = \mu([x_0 - \varepsilon, x_0)) =$$

Заметим, что

$$\emptyset = \bigcap_{\varepsilon > 0} [x_0 - \varepsilon, x_0)$$

-2-

Пересечение вложенных систем
интервалов $[x_0 - \varepsilon, x_0)$, $\varepsilon \in (0, 1)$

В силу непрерывности меры, графический на промежутке

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu([x_0 - \varepsilon, x_0)) = \mu(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [x_0 - \varepsilon, x_0)) =$$

$$= \mu\left(\bigcap_{\varepsilon > 0} [x_0 - \varepsilon, x_0)\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

т.е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} g_\mu(x_0 - \varepsilon) = g_\mu(x_0)$

Значит $g_\mu(x)$ — непрерывная функция $\forall x \in (0, 1)$

Задача 2. Пусть $F(x) \geq 0$ монотонно неубывающая, кусочно-линейная, непрерывная функция, $x \in [0, 1]$. Рассмотрим меру на A_1 , где кривой $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$, $0 \leq a < b < 1$, кривая, описывая многоугольник на всей отрезке A_1 . Докажем, что μ — счетно-аддитивная мера. Докажем, что любой интервал

Решение. Докажем, что любой интервал $[a, b)$ можно разбить на счетное число непересекающихся интервалов

$$\text{Пусть } [a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k).$$

- 2 -

Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$ справедливо в смысле:

$$[a, b) \supseteq \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k) \text{ и в силу}$$

конечной аддитивности

$$\mu([a, b)) \geq \sum_{k=1}^N \mu([a_k, b_k)).$$

Переходим к пределу при $N \rightarrow \infty$

$$\mu([a, b)) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu([a_k, b_k))$$

Проверим обратное неравенство $\forall \varepsilon > 0$

Поскольку $F(x)$ непрерывна слева,

Выберем числа $\delta, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$

Такие что

$$0 \leq F(b) - F(b - \delta) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq F(a_k) - F(a_k - \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Заметим, что отрезок $[a, b - \delta]$ (а тем

более, полуоткрытый $[a, b - \delta)$)

покрывается интервалами $(a_k - \delta_k, b_k)$.

Значит, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, т.е.

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad [a, b - \delta] \subset \bigcup_{k=1}^N [a_k - \delta_k, b_k)$$

и, следовательно,

$$[a, b - \delta) \subset \bigcup_{k=1}^N [a_k - \delta_k, b_k)$$

В силу равномерной непрерывности функции f (это легко и вытекающей из-за $F(x)$!) $\mu([a, b-\delta]) \leq \sum_{k=1}^N \mu([a_k - \delta_k, b_k])$, т.е.

$$\underline{F(b-\delta) - F(a)} \leq \sum_{k=1}^N \underline{F(b_k) - F(a_k - \delta_k)}$$

Напомним, что

$$F(b) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{F(b-\delta)}$$

$$\underline{-F(a_k - \delta_k)} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} - F(a_k)$$

Следовательно,

$$F(b) - F(a) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^N F(b_k) - F(a_k) + \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$F(b) - F(a) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^N F(b_k) - F(a_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

т.е. $F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^N F(b_k) - F(a_k) + \varepsilon$

$$\mu([a, b]) \leq \sum_{k=1}^N \mu([a_k, b_k]) + \varepsilon$$

Следовательно

$$\mu([a, b]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu([a_k, b_k]) + \varepsilon$$

Так как $\varepsilon \rightarrow 0$ и полагая

$$\mu([a, b]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu([a_k, b_k]) \quad \blacksquare$$

② Мера Лебега на отрезке $[0, 1]$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ элементарных множеств на $[0, 1]$, которая порождается с помощью линейных

$$\Phi = \{[a, b], 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{[a, b], 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{[a, b], 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{[a, b], 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Эта алгебра состоит из конечных объединения непересекающихся промежутков (промежутки это или интервал, или полуинтервал или отрезок)

Рассмотрим меру на $\mathcal{A}$, которая на множестве Φ равна

$$\mu([a, b]) = \mu([a, b]) = \mu([a, b]) = \mu([a, b]) = b - a$$

Далее, на $\mathcal{A}$ эта мера есть сумма длин непересекающихся промежутков

Лемма 3. Построенная мера на $\mathcal{A}$ является сигма-аддитивной.

Решение. Рассмотрим функцию

$$F(x) = x$$

и применим к ней лемму Карнео, и

аналогичное рассуждению в задаче 2
где измерим A_1 , левая половина
возмущения $\{[a, b), 0 \leq a \leq b \leq 1\}$
Существенно усложняется неубыва-
ющая функция $F(x) = x$.
Понятие гильбертова - задачи на гош

Определение 1. Внешняя мера
можно измерить $A \subseteq [0, 1]$.

$$\mu^*(A) = \inf_{P_k: \bigcup P_k \supset A} \sum \mu(P_k)$$

где $\{P_k\}$ - система промежутков,
покрывающих мн-во A (конечное или
счетное).

Задача 4. Если мн-во A имеет меру
нуль, то $\mu^*(A) = 0$.

Решение: очевидно следует из определе-
ния меры мн-ва меру нуль.

Задача 5. Внешняя мера является
относительно σ -аддитивной функцией.

т.е. если $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

Лемма: Если $\{P_{k,i}\}$ покрывает A_k
то в совокупности $\{P_{k,i}\}_{k=1}^{\infty}$ покрывает A
поэтому $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_i \mu(P_{k,i})$ (*)

При этом $\mu^*(A_k) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_{k,i})$
переходим к inf в правой части (*)
и получаем, что
$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

Определение 2 Множество A называется узким по Лебегу, если
 $\forall \varepsilon > 0 \exists B \subset A$ (аппроксимация)
 $\mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon$

т.е. A можно приблизить элементарным множеством с любой точностью в смысле такого "расстояния"

Задача 6. Проверить, что функция
 $\rho(A, B) = \mu^*(A \Delta B)$
удовлетворяет неравенству тр-ка:
 $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B) \quad \forall A, B, C$

Решение. Вспомогат. у. "непересекающ." тр-ка гдет минимизируется разность:

$$A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$$

и субаддитивности внешней меры:

$$\begin{aligned} \mu^*(A \Delta B) &\leq \mu^*((A \Delta C) \cup (B \Delta C)) \leq \\ &\leq \mu^*(A \Delta C) + \mu^*(B \Delta C) = \rho(A, C) + \rho(B, C) \\ \text{т.е. } \rho(A, B) &\leq \rho(A, C) + \rho(B, C) \quad \square \end{aligned}$$

Вопрос: Им. $\rho(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$?

Ответ: нет. т.к. $\mu^*(A \Delta B) = 0 \Rightarrow$

$A \Delta B$ имеет нуль меры. т.е. может быть не нуль.

Однако, имеет место отношение эквивалентности на множествах:

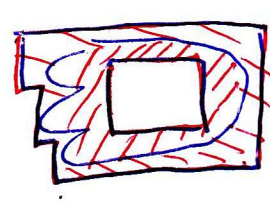
$A \sim B \Leftrightarrow \mu^*(A \Delta B) = 0$. тогда
вопрос на воопросе рассрощение на множествах у $[0, 1]$.

Зелая 7. Матрица, упрощенная по Хэффману, сведение упрощенной по Лейбену.

Решение Пусть A - внутренняя по
 *офрану, тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдутся
 элементарные множества P_1 и P_2

$$P_1 \subseteq A \subseteq P_2, \text{ причем}$$

$$\mu(P_2 \setminus P_1) \leq \varepsilon$$



$$\text{Тогда } \mu^*(P_2 \Delta P_1) \leq \varepsilon$$

$$\text{При этом } A \Delta P_1 \subseteq P_2 \Delta P_1, A \Delta P_2 \subseteq P_2 \Delta P_1$$

$$\text{т.е. } \mu^*(A \Delta P_1) < \varepsilon, \mu^*(A \Delta P_2) < \varepsilon$$

Значит, A - внутренняя по Лебегу

Задача 8 Пусть U открытое множество
 из $[0, 1]$. Тогда U - внутренняя по Лебегу

Решение Если U - открыто, тогда
 U - это объединение не более чем
 счетного множества непересекающихся
 интервалов: $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$

$$\text{Рассмотрим } P_n = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) - \text{тогда}$$

элементарное мн. во, причем

$$U \Delta P_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| \leq 1$, т.к.
 $U \subset [0, 1]$ и интервалы не пересекаются.
 Следовательно,
 $\mu^*(U \Delta P_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k - a_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$
 Поэтому U — измеримо по Лебегу

Домашнее задание

Задание 1 Доказать, что биекционная мера на $\mathbb{R}$ -мерном евклидовом пространстве $(\mu(a, b) = b - a)$ является мерой-аффинностью.

Задание 2 Доказать, что линейная мера μ на $\mathbb{R}$ -мерном евклидовом пространстве удовлетворяет
 $\mu^*(\alpha A) = |\alpha| \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{R}$
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Задание 3 Доказать, что любая замкнутая измеримая по Лебегу мера не может быть мерой-аффинностью.

Задание 4 Доказать, что любая замкнутая мера не может быть мерой-аффинностью.