

Мера Лебега (продолжение)

Напомним определение меры Лебега.
 Дано множество $X = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ - алгебра элементарных множеств из X , т.е.

$$\mathcal{A} = \{ A : A \text{ - объединение конечного числа промежутков (непересекающихся)} \}$$

На $\mathcal{A}$ задана мера Лебега, удовлетворяющая на промежутках с границами

$$\mu([a, b]) = \mu([a, b]) = \mu([a, b]) = b - a$$

Определение 1. Внешняя мера $\forall A \subseteq X$.
 (любое подмножество из X)

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{P_k \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A}} \sum \mu(P_k), \quad P_k \text{ - элементарные мн-ва из } X$$

Свойства: 1) μ^* - монотонна, монотон,
 т.е. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

2) μ^* не является аддитивной мерой

3) μ^* - мера субаддитивна

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

(Существуют мн-ва $A, B \subseteq X$: $A \cap B = \emptyset$
 $\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$)

Определение 2. $A \subseteq X$ измеримо по Лебелю, если $\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A}$ (элементарное мн-во)

$$\mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon$$

Свойства измеримых по Лебелю мн-в

1. Если A -измеримо по $\mu \Rightarrow X \setminus A$ -измерим

Справедливо $A \Delta B = (X \setminus A) \Delta (X \setminus B)$

2. Образуется алгебра мн-в $\mathcal{L}$, которая является σ -алгеброй. (Доказано в лекциях)

Определение 3. Пусть A -измеримо по Лебелю. Мера Лебега - вещественная мера μ на $\mathcal{L}$.

$$\mu(A) = \mu^*(A)$$

Теорема 1. Мера Лебега является неотрицательной мерой на σ -алгебре $\mathcal{L}$ измеримых по Лебелю множеств (Доказано в лекциях)

Примеры измеримых по Лебелю мн-в

0. Элементарные мн-ва

1. Мн-ва, измеримые по Жордану

2. Открытые множества (показан на рисунке)

3. Закрытые мн-ва (показан?)

$$(K \Delta P) = (X - K) \Delta (X - P)$$

4. Бoreльские мн-ва (показан?) В.

В-открытые σ -алгебры, которые порождены открытыми мн-вами. Открытые мн-ва порождены σ -алгеброй $\Rightarrow B \subset \mathcal{L}$

Задача 0. Чему равна мера Лебега множества Кантора? K

Решение



Выбираем: $V_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $V_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ и т.д.

$$K = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \right), \quad V_k \text{ — все вырезанные}$$

$$\begin{aligned} \mu(K) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V_k) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0 \end{aligned}$$

Введем внутреннюю меру множества. Не так, как внутренняя мера Жордана.

Определение 4 ⁻⁴⁻ $A \subseteq X = [0, 1]$

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*([0, 1] \setminus A)$$

Задача 1 $\forall A \subseteq [0, 1] \quad \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$

Решение: Воспользуемся аддитивностью внешней меры:

$$[0, 1] = A \cup ([0, 1] \setminus A) \Rightarrow$$

$$1 = \mu^*([0, 1]) \leq \mu^*(A) + \mu^*([0, 1] \setminus A) \Rightarrow$$

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*([0, 1] \setminus A) \leq \mu^*(A)$$

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A) \quad \square$$

Задача 2 Мн-во A — внутреннее по Лебегу тогда и только тогда, когда $\mu_*(A) = \mu^*(A)$

Решение.

$\Rightarrow$ Пусть A — внутреннее по Лебегу, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \exists B$ — элементарное мн-во

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

Заметим, что $(X \setminus A) \Delta (X \setminus B) = A \Delta B$

$$\text{тогда } \mu^*((X \setminus A) \Delta (X \setminus B)) < \varepsilon$$

Мн-во B и $X \setminus B$ элементарны, т.е.

$$\mu^*(B) = \mu(B), \quad \mu^*(X \setminus B) = \mu(X \setminus B)$$

- 5 -

Сифованенно, $\mu^*(B) + \mu^*(X \setminus B) = \mu(X) = 1$

Из леммы в лекциях следует, что

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

$$|\mu^*(X \setminus A) - \mu^*(X \setminus B)| \leq \mu^*((X \setminus A) \Delta (X \setminus B)) < \varepsilon$$

Сифованенно

$$|\mu^*(X \setminus A) + \mu^*(A) - 1| \leq 2\varepsilon.$$

Поэтому ε -нривно, т.е.

$$\mu^*(X \setminus A) + \mu^*(A) = 1, \quad \text{т.е.}$$

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(A).$$

В обратную сторону $\Leftarrow$

Пусть $\mu_*(A) = \mu^*(A) \Rightarrow \mu^*(X \setminus A) + \mu^*(A) = 1$

Покажем, что A -измеримо по Лебелю.

Покроем множества A и $X \setminus A$ нривными

$$\{B_n\} \text{ и } \{C_n\}, \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad X \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

нрив:

$$\mu^*(A) \leq \sum \mu(B_k) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\mu^*(X \setminus A) \leq \sum \mu(C_k) \leq \mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Это можно сделать по определению внешней меры.

-6-

Реш $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ сходится, и поэтому

для любого N имеет $\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(B_k) < \frac{\varepsilon}{3}$

Рассмотрим $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ — элементарное м-во.

Покажем, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

(т.е. что это требуемое приближение A)

Рассмотрим $P = \bigcup_{n=N}^{\infty} B_n \supseteq A \setminus B$

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap C_n) \supseteq B \setminus A$$

Тогда $A \Delta B \subset P \cup Q$

Заметим, что $\mu^*(P) < \frac{\varepsilon}{3}$

(см. $\circ$)

Остало проверить, что

$$\mu^*(Q) < \frac{2}{3} \varepsilon.$$

Имеем:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus B) \right) = X$$

Действительно, если точка x принадлежит B , то она принадлежит $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$; а если x не принадлежит B , то она принадлежит либо какой-то P , либо какой-то из C_n .

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \geq \mu(X) = 1$$

A по построению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \mu^*(A) + \mu^*(X-A) + \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\varepsilon$$

Выведем теперь из этого

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n \setminus B) =$$

$$= \sum \mu(C_n \cap B) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\text{Следовательно, } \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

Пусть $\{E_n\}$ — последовательность measurable множеств

$$\text{Рассмотрим: } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k \geq n} E_k \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}_n = \bigcup_n \left(\bigcap_{k \geq n} E_k \right)$$

Итак, мы имеем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}_n \subseteq \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$

$$x \in \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}_n \Leftrightarrow \exists n \forall k \geq n \quad x \in \bar{E}_k \quad (1)$$

$$x \in \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \Leftrightarrow \forall n \exists k \geq n \quad x \in E_k \quad (2)$$

$$(i.e. \exists n_k \rightarrow \infty : x \in E_{n_k})$$

Ясно, что $(1) \Rightarrow (2)$

Вопрос: Может ли быть строгое включение?

Ответ: А.А. Пример, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}_n$

$$A \neq B, \quad \{E_n\} = \{A, B, A, B, \dots\}$$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = A \cup B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}_n = A \cap B$$

Задача 3. Мы бы $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}_n$ естественным образом по лемме

Рисерман в самом деле, они взаимно-исключаемы, естественно мы бы получили $\cap$ и $\cup$, а Δ -абсолютно σ -замкнуты.

Задача 4. Пусть E_n — измеримы по Лебегу, причем $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$.

Докажем, что $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$.

Решение: Заметим, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k \subset \bigcup_{k \geq n} \mu(E_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Следовательно, $\forall n \geq 1$

$$\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(E_k) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

т.к. $\inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$.

Будем рассматривать борелевские м-ва.

Задача 4. Пусть A — открытое м-во Лебесга.
Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists U$ — открытое м-во

и $\exists K$ — замкнутое м-во
 $K \subseteq A \subseteq U$, причем
 $0 < \mu(U) - \mu(K) < \varepsilon$

Решение: По определению открытого м-ва

м-во Лебесга: $\forall \varepsilon > 0 \exists B$ — элементарное
 $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. При этом $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Заметим, что м-во $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ можно задать также в виде
 с замкнутыми точками (замкнутые отрезки)

а именно $\sigma \text{ на } \Sigma \text{ с } \mu^{-1} \text{ транзитивна } B = B_2$
 открытые интервалы). Кроме того, при
непрерывном измерении $A \Delta B$ можно
 разбить открытые интервалы P_k

$$A \Delta B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) < \varepsilon$$

Тогда μ интервалов можно выкинуть из
 замкнутого B_1 : $K = B_1 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right)$

и добавить к открытому B_2

$$\text{т.е. } U = B_2 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right)$$

Тогда, очевидно: $K \subset A \subset U$

$$\text{при этом } \mu(U) - \mu(K) < \varepsilon$$

Лемма 5. Любое измерение по Лебегу
 множества A представимо в виде

$$A = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \right) \cup N = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \right) \cup M$$

где $\{U_k\}$ — открытые мн-ва

$\{K_k\}$ — замкнутые мн-ва

$$\mu(N) = \mu(M) = 0.$$

Решение: Вспомогательная лемма 4.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и рассмотрим покрытие множества A . U_n — открытые, K_n — замкнутые,

так, что $K_n \subseteq A \subseteq U_n$
 $0 < \mu(U_n) - \mu(K_n) < \frac{1}{n}$

Тогда $N = (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \setminus A$; $M = A \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)$

Легко, что $\mu(N) = \mu(M) = 0$.

Напомним, что множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \in G\delta$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in F_2$

Следствие: Любое измеримое по Лебегу множество представимо в виде

$A = B \cup N$, где B — борелевское множество, $\mu(N) = 0$

Задача 6. Можно ли считать, что всякое измеримое множество борелевское?

Решение: Можно считать

$$\leq \theta \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) = \theta \cdot \mu(B)$$

Берем inf по всевозможным B и

получаем

$$\mu^*(A) \leq \theta \cdot \mu^*(A) \Rightarrow \mu^*(A) = 0$$

т.е. $\mu(A) = 0$.

Самостоятельная работа

Задача 1. На множестве $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ с алгеброй $\mathcal{A} = 2^X$ ввести σ -аддитивную меру, которая не равна нулю на каждом $A \in \mathcal{A}$, причем $\mu(X) = 1$.

Задача 2. Доказать неравенство

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$$

Задача 3. Найти меру Лебеля поглощающего функции Лебеля на n -мерном, $n > 0$ и $n = \infty$ декартовом произведении и первых коэффициентов

Домашнее задание

Задача 1* Построить непрерывные функции, переводящие квадрат с любыми интервалами и всем положительным меру, строго меньше меру или меру этого интервала.

Задача 2 Построить непрерывные функции на плоскости, имеющие конечную меру лебег

Задача 3 Доказать, что любое аффинное м.м. на плоскости равномерно в том же смысле абелева и м.м. на плоскости равномерно

Задача 4 Пусть A - непрерывная м.м. на плоскости, причем $\mu(A) > 1$. Доказать, что A содержит где-то равносторонний треугольник с одинаковыми сторонами.