

2K. Мат. Анализ. Семинар №6

① Разбор задач самостоятельной работы

Задача 1. $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $\mathcal{A} = 2^X$. Ввести счетно аддитивную меру μ : $\mu(A) \neq 0 \forall A \neq \emptyset$ и найти $\mu(X) = 1$.

Решение. $X = \{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mu(q_k) = \frac{1}{2^k}$

Тогда $\mu(A) = \sum_{q_k \in A} \frac{1}{2^k}$, $\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

Задача 2. Доказать, что $\forall A, B \in 2^X$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$$

Решение. Вытекает из аддитивных свойств.

$$A \subseteq B \cup (A \Delta B)$$

$$B \subseteq A \cup (A \Delta B)$$

Тогда в силу аддитивности μ^*

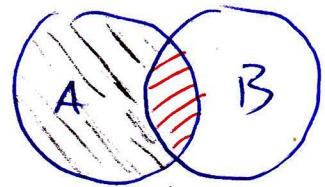
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B)$$

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B)$$

$\Downarrow$

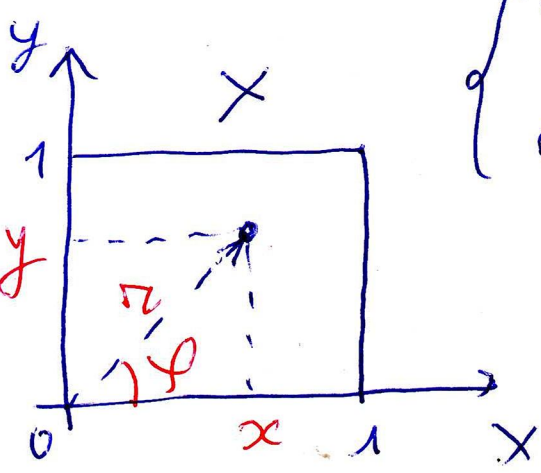
$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$$

Доказать непрерывность верхней меры в метрике $\rho(A, B) = \mu^*(A \Delta B)$.



Задача 3. Найти меру лебег множества точек единичного квадрата, состоящего из точек с иррациональными координатами и иррациональными коэффициентами

Решение:



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} ; \quad A - \text{гиперплоскость}$$

Рассмотрим

$$X \setminus A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

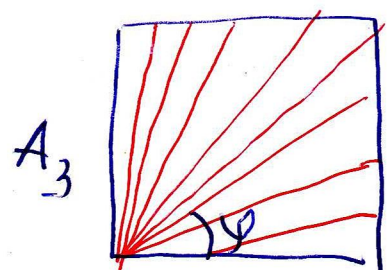
- A_1 - x -коэф. рациональные
- A_2 - y -коэффициенты рациональные
- A_3 - z -коэффициенты рациональные
- A_4 - φ -коэффициент рациональный

$$A_1 = \{ [0, 1] \times \mathbb{Q} \} \times [0, 1] \Rightarrow \mu(A_1) = 0.$$

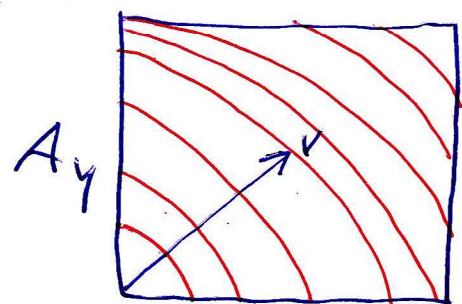
$$A_2 = [0, 1] \times \{ [0, 1] \cap \mathbb{Q} \} \Rightarrow \mu(A_2) = 0$$

$$\text{Аналогично } \mu(A_3) = \mu(A_4) = 0$$

$$\text{т.е. } \mu(X \setminus A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 1.$$



$\varphi \in \mathbb{Q}$



$r \in \mathbb{Q}$

② Неизмеримые множества

Задача 1 Привести пример множества неизмеримого по Лебегу.

Решение: Рассмотрим $X = [0, 1]$

Введем отношение эквивалентности на X :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

1. $x \sim x$, 2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q}, y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow$
 $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \sim z$

Пусть A - множество, которое содержит ровно один элемент из каждого класса эквивалентности и выбрано по одному элементу в каждом классе эквивалентности. Это можно сделать в силу аксиомы выбора.

Пусть $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ рассмотрим м. во
 $A_r = (A + r) \bmod 1 = (r + A) \cup (r - 1 + A) \cap [0, 1]$

Заметим, что $A_{r_1} \cap A_{r_2} = \emptyset \quad \forall r_1 \neq r_2$

Если A измеримо, то A_r измеримо $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$
 т.к. измеримость инвариантна относительно сдвигов на $r_1 - r_2$, имеем $\mu(A_{r_1}) = \mu(A_{r_2})$.

Заметим, что

$$[0, 1] = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} A_r$$

$$\mu([0, 1]) = \sum \mu(A_r)$$

Если все A_k одновременно нулевы,
то имеем $\mu(A_k) = 0 \quad \forall k \Rightarrow \mu([0,1]) = 0$
или $\mu(A_k) > 0$ (один из) $\Rightarrow \mu([0,1]) = \infty$.
Противоречие. Следовательно, A -не нуле-
вно по Лебегу.

Пусть $A \subset [0,1]$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \forall B \subseteq A$
 B -нулево по Лебегу, $\mu(B) = 0$.

Задача 2. Пусть A -измеримо по Лебегу
и, более, имеем $\mu(A) > 0$. Доказать,
что существуют непустые из-
меримые $B \subset A$.

Решение. Рассмотрим как при помощи
нам задачу 1. Вспомогательное измеримое
множество A : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$
Сначала $A = \bigcup_{\alpha \in U} H_\alpha$. Вспомогательное $B \subset A$,
 B -измеримо по 1 элементу из класса U
т.е. $\forall \alpha \in U \quad \#(B \cap H_\alpha) = 1$.

Омеем: $B_k = [B + k] \bmod 1$,
 $B_{k_1} \cap B_{k_2} = \emptyset \quad \forall k_1 \neq k_2$

при этом $A \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} B_x \subseteq [0,1]$

Если B -универсально, то B_x -универсально $\forall x \in \mathbb{Q}$

$$\mu(B_{x_1}) = \mu(B_{x_2})$$

Если $\mu(B_x) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ (универсально)

Если $\mu(B_x) > 0 \Rightarrow \mu([0,1]) = \infty$ (универсально)

Следовательно, B - не универсально по Лебегу

Задача 3 Построить пример универсально
по Лебегу мн.-ва в $\mathbb{R}^2$.

Решение: Аналогично задаче 1.
Возьмем отношение эквивалентности
 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}, y_1 - y_2 \in \mathbb{Q}$
Далее рассмотрим Аналогично

Задача 4 Построить пример универсально
мн.-ва в $\mathbb{R}^2$, у которого обе проекции
на оси Ox и Oy неуниверсальны

Решение: Пусть $A \subset [0,1]$ - не универсально

Тогда $\{A \times \{0\}\} \cup \{\{0\} \times A\} \subset [0,1] \times [0,1]$
проекции на Ox и Oy бывают A .

Задача 5. Построить пример двух множеств A_1 и A_2 из $\mathbb{R}$, таких, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \sqcup A_2$ — измеримо, и при этом $\mu^*(A_1 \sqcup A_2) < \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$

Решение. Пусть $A \subset [0, 1]$ не измеримо.

Положим $A_1 = A$, $A_2 = [0, 1] \setminus A$.

тогда $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \sqcup A_2 = [0, 1]$.

При этом $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) > 1$, т.е.

были бы крайний измеримости A — измеримо $\Leftrightarrow \mu_*(A) = \mu^*(A)$, т.е.

$$1 - \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(A), \text{ т.е.}$$

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = 1.$$

Задача 6. Пусть A — не измеримое мн-во. ~~из Задачи 5~~ Докажите, что либо A — не измеримо по Лебегу, либо не измеримо по мере Пуанкаре.

Решение. Пусть $B \subset A$. Если B — измеримо,

то $B_k = B + k$ — измеримо, $B_{k_1} \cap B_{k_2} = \emptyset$ $k_1 \neq k_2$
 $\mu(B_{k_1}) = \mu(B_{k_2})$, $\bigcup_k B_k \subset [0, 1]$
 $k \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

- 7 -

если $\mu(B_r) > 0 \Rightarrow \mu([0, 1]) = \infty$

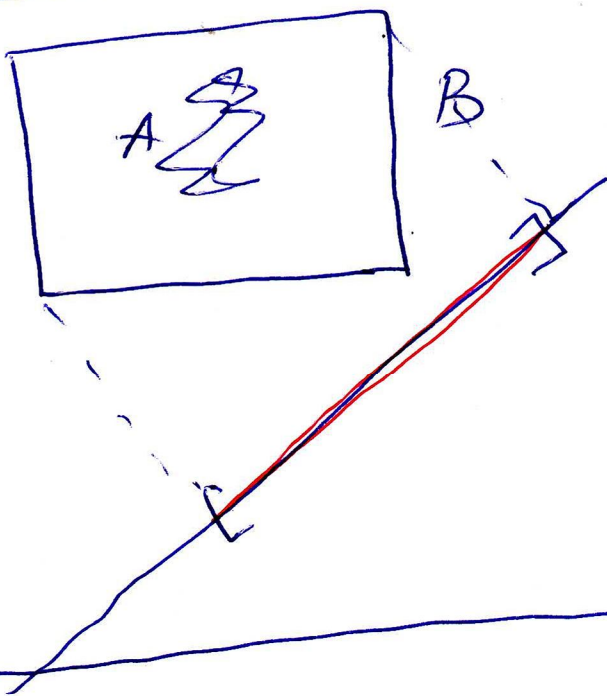
Значит $\mu(B_r) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$

Задача 7. Построить пример негугн-
ривного м. м. на плоскости $\mathbb{R}^2$,
у которого проекция на
любую прямую измерима

Решение

A - не измеримо
в $\mathbb{R}^2$

B - граница кластера



Домашнее задание

Задача 1. Найти меру Лебега подмножества отрезка $[0, 1]$, состоящего из тех x в десятичной записи которых цифра 2 встречается раньше цифры 3.

Задача 2. На множестве $X = [0, 1]$ с σ -алгеброй $\mathcal{A}_1$, порожденной полуинтервалами $\{[a, b), 0 \leq a < b \leq 1\}$ рассматривается мера, для которой $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$, где $F(x) \geq 0$, монотонно неубывающая, непрерывная слева функция, $x \in [0, 1]$. Пусть $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2] \\ 1, & x \in (1/2, 1] \end{cases}$.

Описать для этой меры все измеримые множества. Как выглядит эта мера Лебега?

Задача 3. Пусть E - измеримое по Лебегу множество из $[0, 1]$ положительной меры. Доказать, что найдется глб мн $x, y \in E$, где $x - y \in \mathbb{Q}$.