2К. Мат. Анализ. Семинар № 7

Измеримые функции

Заданы два измеримых пространства $(X, \mathbb{A})$, $(Y, \mathbb{B})$, где $\mathbb{A}$ – σ-алгебра в X,
$\mathbb{B}$ – σ-алгебра в Y.

Определение 1. Функция $f: X \to Y$ называется $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-измеримой, если $\forall B \in \mathbb{B}$ множество $f^{-1}(B) \in \mathbb{A}$ – измеримо.

Обычно будем рассматривать $Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{R}^n$, а в качестве σ-алгебры $\mathbb{B}$ будем брать борелевскую σ-алгебру.

Задача 0. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$

а) X – любое, $\mathbb{A} = \{\varnothing, X\}$

б) X – любое, $\mathbb{A} = 2^X$

в) $\Phi = \{\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\}$, $\mathbb{A} = \Sigma_\Phi$

Описать все измеримые функции

Решение

а) Ответ: только постоянные функции,
т.е. константы

б) Любая функция измерима

в) Все функции, которые принимают положительные значения на каждом A_i

т.е. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}(x)$

Определение 2. Измеримые по Лебегу функции. Частный случай: $Y = \mathbb{R}$, $\mathbb{B}$ - борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$

Основной пример: $(X, \mathbb{A}, \mu)$ - измеримое пр-во с мерой. $X = [a, b]$, $\mathbb{A} = \mathcal{L}$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу мн-в., μ - мера Лебега

По определению, $f: X \to \mathbb{R}$ - измерима, если $\forall B \in \mathbb{B}$ - борелевские в $\mathbb{R}$ мн-во $f^{-1}(B)$ - измеримо по Лебегу.

Эквивалентное определение

Определение 3. $f: X \to \mathbb{R}$ - измерима по Лебегу, если $\forall c \in \mathbb{R}$ мн-во $\{x: f(x) < c\} \in \mathcal{L}$ - измеримо по Лебегу в X.

В самом деле, борелевская алгебра порождается семейством лучей:

$$\mathbb{B} = \Sigma_{\Phi}, \quad \Phi = \{(-\infty, c),\ c \in \mathbb{R}\}.$$

Примеры измеримых функций

$$X = [a, b].$$

а) элементарные функции:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}$$

$$[a, b] = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \in \mathcal{L}.$$

б) $f(x) \in C[a, b]$ непрерывная функция, т.к., по определению $\forall U$ - открытое в $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ - открыто в $[a, b]$, т.е. измеримо по Лебегу.

в) монотонные функции измеримы.

г) Функция Дирихле

д) Функция Римана

Определение 4. Функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется борелевской, если $\forall B$ - борелевского в $\mathbb{R}^m$ мн-во $f^{-1}(B)$ - борел. в $\mathbb{R}^n$.

Пример борелевской функции — любая непрерывная функция.

Рассмотрим сложную функцию:

$$F(x) = f(g(x)) \text{, где}$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

Тогда $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Теорема</u>: Пусть $g(x)$ — измерима по Лебегу, а $f(y)$ — борелевская. Тогда $F(x)$ — измерима по Лебегу.

<u>Док-во</u>. Пусть $B \subset \mathbb{R}$ — борелевское мн-во, тогда $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^m$ — борелевское, т.к. ф-ия f борелевская по условию. Следовательно $g^{-1}(f^{-1}(B))$ измеримо, т.к. g измерима по условию.

Осталось заметить, что

$$g^{-1}(f^{-1}(B)) = F^{-1}(B) \text{, т.е.}$$

$F(x)$ — измеримая функция

<u>Следствие 1</u>. Пусть f — непрерывная, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, а g — измеримая, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда $F = f(g(x))$ измерима.

Следствие 2. Пусть $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — непрерывная в $\mathbb{R}^n$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$; $x \in \mathbb{R}^n$

Пусть $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ — измеримы.

Тогда $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))$ — измерима.

Задача 1. Пусть $g_1(x), g_2(x)$ — измеримы. Доказать, что следующие функции тоже измеримы.

а) $|g_1(x)|$; б) $g_1(x) + g_2(x)$;

в) $g_1(x) \cdot g_2(x)$; г) $\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$, при $g_2(x) \neq 0$.

Решение:

а) $f(y) = |y|$, $F(x) = f(g_1(x))$

б) $f(y_1, y_2) = y_1 + y_2$, $F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$

в) $f(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2$; $F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$

г) $f(y_1, y_2) = \dfrac{y_1}{y_2}$, $y_2 \neq 0$.

Задача 2. Привести пример неизмеримой функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$.

Решение: Пусть A — не измеримое по Лебегу множество.

Тогда $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

будет, очевидно, неизмеримой функцией, т.к. при $C = 1$ $\{\chi_A(x) < 1\} = [a, b] \setminus A$ — неизмеримое мн-во.

Задача 3. Пусть функция $f^2(x)$ является измеримой. Верно ли, что $f(x)$ измерима?

Решение:

Ответ: нет.

Пример $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \in A \end{cases}$.

Тогда $f^2(x) \equiv 1$ — измерима, а $f(x)$ — нет.

Задача 4. Пусть $F(x) = f(g(x))$, где $f(x)$ — измеримая функция, $g(x)$ — непрерывная функция. Верно ли, что $F(x)$ — измеримая ф-ция?

Ответ: НЕТ. Пример строится с помощью ф-ции Кантора.

Задача 5. Пусть $f_n(x)$, $x \in [a, b]$, измеримые функции, причем $\{f_n(x)\}$ — ограничена $\forall x \in [a, b]$. Рассмотрим

$$M(x) = \sup_{n \in N} f_n(x)$$

$$m(x) = \inf_{n \in N} f_n(x)$$

Доказать, что $M(x)$ и $m(x)$ — измеримы.

Решение: $\{x \in [a, b] \;\; M(x) > a\} =$

$\{x \in [a, b]: \sup\limits_{n \in N} f_n(x) > a\} =$

$= \bigcup\limits_{n \in N} \{x \in [a, b]: \; f_n(x) > a\}$

$\{x \in [a, b], \; m(x) > a\} = \{x \in [a, b], \; \inf\limits_{n \in N} f_n(x) > a\} =$

$= \bigcap\limits_{n \in N} \{x \in [a, b]: \; f_n(x) > a\}$

Оба этих множества измеримы. Соответственно, измеримы $M(x)$ и $m(x)$.

Задача 6. В условиях задачи 5 доказать, что функции

$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x)$ и $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x)$ измеримы.

Решение. По определению имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \inf_{m\in N} \left[\sup_{n>m} f_n(x)\right]$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \sup_{m\in N} \left[\inf_{n>m} f_n(x)\right]$$

Воспользуемся задачей 5 и получим измеримость $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$.

Задача 7. Пусть $f_n(x)$ – измеримы и $\forall x \in [a,b]$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Доказать, что $f(x)$ – измерима.

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x)$,

т.е., по задаче 6 измерима.

Задача 8. Пусть $f(x)$ – измерима и $\forall x \in [a,b]$ $\exists f'(x)$

Доказать, что $f'(x)$ – измерима.

Решение: по определению

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n\cdot\left(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right)}_{\text{измерима}}$$

т.е. по задаче 7, $f'(x)$ измерима

Самостоятельная работа № 4

Задача 1. Пусть $f_1(x), f_2(x)$, $x \in [a, b]$, – измеримые функции. Доказать, что функции $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ и $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ измеримы.

Задача 2. Пусть $\forall c \in \mathbb{R}$ множество $\{f(x) = c\}$ – измеримо. Верно ли, что f – измеримая функция?

Задача 3. Пусть $f_n(x)$ – измеримые функции. Доказать, что множество $A = \{x \in X : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$ измеримо.