Разбор задачи № 2 из самостоятельной работы № 4.

Задача 2. Пусть мн-во $\{f(x)=c\}$ измеримо по Лебегу $\forall c \in \mathbb{R}$. Верно ли, что функция $f(x)$ измерима?

Решение: ответ: НЕТ.

Построим контр. пример: $X=[0,1]$.

Пусть A — неизмеримое по Лебегу множество из $[0,1]$. Пусть $\chi_A(x)$ — характеристическая функция мн-ва A.

Рассмотрим $f(x)=\begin{cases} x, & x\in A \\ -x, & x\notin A. \end{cases}$

Тогда $\forall \in \mathbb{R}$ $\{f(x)=c\}$ либо пусто, либо состоит из одной точки. При этом

$$\{f(x)<0\}=[0,1]\setminus A$$ — не измеримо по Лебегу

т.е. ф-ция $f(x)$ не измерима по Лебегу

2К Мат. Анализ. Семинар № 8

Различные типы сходимости измеримых функций

Дана последовательность функций: $\{f_n(x)\}$, $x \in X$; $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

① **Поточечная сходимость**

$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, если $\forall x \in X$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

② **Равномерная сходимость**

$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, если $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n\to\infty)$.

Задача 1. Доказать, что последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$ сходится поточечно на $X = \mathbb{R}$, но не сходится равномерно.

Решение: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \to 0$ $(n\to\infty)$, т.е. $f(x) \equiv 0$. Вместе с тем, при $x = n$ $f_n(n) = \dfrac{n^2}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \geq \dfrac{1}{2}$

т.е. $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$ $(n\to\infty)$ ∎

Задача 2. Исследовать на сходимость последовательность $f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$.

Решение

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Есть поточечная сходимость. А равномерная?

$x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\in[0,1]$, $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$, т.е.

имеем $\sup\limits_{x\in X} f_n(x)\not\to 0\ (n\to\infty)$.

---

③ Эквивалентность функций.

Задано в X пространство с мерой:

(X,Σ,μ), Σ – σ-алгебра, μ – σ-ад. мера

Определение 1. $f\sim g \iff \mu(f(x)\neq g(x))=0$.

Это отношение эквивалентности:

1) $f\sim f$, 2) $f\sim g \Rightarrow g\sim f$

3) $f\sim g,\ g\sim h \Rightarrow f\sim h$, т.к.

$\{f(x)\neq h(x)\}\subseteq\{f(x)\neq g(x)\}\cup\{g(x)\neq h(x)\}$

Задача 3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, $x \in [0,1]$. Доказать, что
$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) \equiv g(x) \quad \forall x \in X.$$

Решение очевидно.

Вопрос: будут ли эквивалентны функции Дирихле и Римана? К какому классу эквивалентности они принадлежат?

Ответ: ДА! к нулевому классу

Задача 4. Построить пример измеримой по Лебегу функции на отрезке $[0,1]$, которая не эквивалентна никакой непрерывной функции на $[0,1]$

Решение:

примеры: а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

б) $f(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 0, & x \notin [0,\frac{1}{2}] \end{cases}$

④ Сходимость почти всюду

Дана $\{f_n(x)\}$, $x \in X$, функции измеримы

Определение 2.

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x) \Leftrightarrow \mu(x : f_n(x) \not\to f(x)) = 0.$$

$f_n(x)$ – сходится п.в.: $\mu(x : f_n(x)$ – расходится$) = 0$.

Задача 5. Пусть $f_n(x)$ сходится почти всюду. Доказать, что ее предел $f(x)$ измеримая функция.

Решение. Рассмотрим подмножество $X' \subseteq X$:

$$x \in X' \Leftrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Тогда X' – измеримо по Лебегу и $\mu(X \setminus X') = 0$.

Рассмотри X' как измеримое пространство с той же мерой, что и X, т.е. $\forall A \subset X'$

$$\mu_{X'}(A) = \mu_X(A), \quad \forall A = A \cap X' \text{ - измерим}$$

(т.к. $\mu(X \setminus X') = 0$.)

Тогда по задаче 7 из прошлого семинара на (X', μ) функция $f(x), x \in X'$ – измерима так же измерима, т.к.

Следовательно $f(x), x \in X$ так же измерима, т.к.

$\{x \in X : f(x) < c\} = \{x \in X', f(x) < c\} \cup \{x \notin X', f(x) < c\} \subseteq$

$\subseteq \{x \in X', f(x) < c\} \cup \{x \notin X'\}$ – измеримо,

т.к. $\mu(X \setminus X') = 0$

Задача 6. **О единственности предела п.в.**

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$, $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x)$

Тогда $f \sim g$.

Решение. $A = \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}$

$B = \{x \in X : f_n(x) \not\to g(x)\}$

Тогда по определению, $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 0$

т.к. $\mu(A \cup B) = 0$, но тогда

$f(x) = g(x)$ $\forall x \notin A \cup B$, т.е. $f \sim g$.

---

⑤ **Теорема Егорова** $\mu(X) < \infty$.

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$.

Тогда $\forall \delta > 0$ $\exists$ $E_\delta \subseteq X$ (мн-во Егорова):

$\mu(E_\delta) > \mu(X) - \delta$, $f_n(x) \overset{E_\delta}{\rightrightarrows} f(x)$

Задача 7. Найти множество Егорова для последовательности $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1]$

Решение. **Ответ:** $\forall \delta > 0$

$E_\delta = [0, 1 - \delta]$

Тогда $x^n < (1-\delta)^n$, $\forall x \in E_\delta$, $(1-\delta)^n \to 0$

т.е. $x^n \rightrightarrows 0$ на $E_\delta = [0, 1-\delta]$

<u>Задача 8.</u> Пусть $f_n(x) = \dfrac{n \cdot \sin x}{1+n^2\sin^2 x}$, $x \in [0,\pi]$.

Заметим, что $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [0,\pi]$.

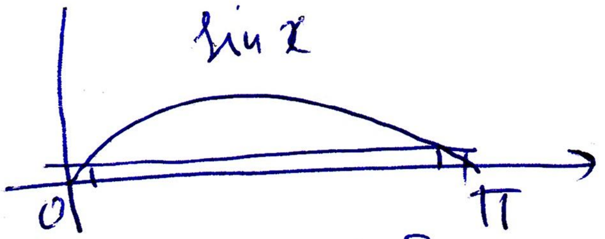
но $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ на $[0,\pi]$, т.к. при $x_n = \frac{1}{n}$

$$f_n(x) = \frac{n \cdot \sin \frac{1}{n}}{1+n^2\sin^2\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{1+1} > \frac{1}{4}.$$

т.к. $\sin x < x \Rightarrow n^2 \sin^2 \frac{1}{n} < 1$.

$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \Rightarrow n \cdot \sin \frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{6n^2} > \frac{1}{2}$

Найдем мн. во E собольно:



$E_\delta = [\frac{\delta}{3}, \pi - \frac{\delta}{3}]$, $\sin x > \sin \frac{\delta}{3}$, $x \in E_\delta$

т.е. $|f_n(x)| < \dfrac{1}{1+n^2\sin(\frac{\delta}{3})}$, $x \in E_\delta$

$\to 0 \ (n \to \infty)$

⑥ Лемма Бореля – Кантелли

Пусть E_n – последовательность измеримых множеств в (X, Σ, μ).

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k \text{ – измеримо.}$$

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$.

Тогда $\mu(E) = 0$.

Пояснение. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$, то мера множества тех точек $x \in X$, которые принадлежат бесконечному числу множеств E_k, равна нулю.

Док-во. Заметим, что $E \subset \bigcup_{k \geq n} E_k \ \forall n \in \mathbb{N}$

тогда $\mu(E) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \to 0 \ (n \to \infty)$,

это хвост ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$, поэтому хвост которых сходится стремится к нулю, т.е. $\mu(E) = 0$.

Какие следствия можно получить из леммы Бореля-Кантелли?

<u>Пусть</u> $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Предположим, что $f_n(x)$ - измеримы.

$E_n = \{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon_n\}$.

<u>Следствие 1.</u> Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, то $f_n(x) \xrightarrow{п.в.} 0$ $(n \to \infty)$.

<u>Следствие 2.</u> Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, то $\forall \delta > 0$ $\exists$ измеримое мн-во $e : \mu(e) < \delta$, что $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на $X \setminus e$.

<u>Доказательство 1</u>

Рассмотрим $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geq n} E_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geq n} \{|f_k(x)| > \varepsilon_k\}$

Тогда по лемме Б.-К. $\mu(E) = 0$.

$x \in X \setminus E \Leftrightarrow \exists n \; \forall k > n \quad |f_k(x)| < \varepsilon_k$

Но тогда $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, т.к. $\varepsilon_k \to 0$.

т.е. $f_n(x) \to 0$ почти всюду в X.

Доказательство 2. $\forall \delta > 0$ выберем достаточно большое N, чтобы хвосты $\sum\limits_{n>N} \mu(E_n) < \delta$

Положим $e = \bigcup\limits_{n>N} E_n$, т.е. $\mu(e) < \delta$

Тогда $\forall x \in X \setminus e$ выполнено неравенство:

$$|f_n(x)| \le \varepsilon_n$$

Но $\varepsilon_n \to 0$. Следовательно, $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на $X \setminus e$. □

Аналогичное рассуждение используется при доказательстве теоремы Егорова

⑦ Сходимость по мере

Определение 3. $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ $(n \to \infty)$:

$\forall \varepsilon > 0$ $\mu(x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon) \to 0$ $(n \to \infty)$

Утверждение: Предел по мере $f(x)$ является измеримой функцией (докажем на следующем семинаре)

Задача 9. Единственность предела по мере

Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} g$ $\Rightarrow$ $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$

т.е. $\mu(f(x) \neq g(x)) = 0$.

Решение. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - измеримы.
Предположим, что $\mu(x: f(x) \neq g(x)) > 0$.
Тогда найдутся числа $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что

$$\mu(x: |f(x) - g(x)| > \delta) \geqslant \varepsilon.$$

Действительно. Обозначим $h(x) = |f(x) - g(x)|$

$$\mu(x: h(x) \neq 0) = \mu\Big(\bigcup_{n \in N} \{x : \tfrac{1}{n+1} < h(x) \leq \tfrac{1}{n}\}\Big) =$$

$$= \sum \mu\left(\tfrac{1}{n+1} < h(x) \leq \tfrac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\exists n: \quad \mu\left(x: \tfrac{1}{n+1} < h(x) < \tfrac{1}{n}\right) = \varepsilon > 0$$

Положим $\delta = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \boxed{\mu(h(x) > \delta) \geqslant \varepsilon}$

Воспользуемся сходимостью по мере:

$$\exists n_0: \quad \mu\left(x: |f_{n_0}(x) - f(x)| > \tfrac{\delta}{3}\right) < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$\mu\left(x: |f_{n_0}(x) - g(x)| > \tfrac{\delta}{3}\right) < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Заметим, что

$$\{x: |f(x) - g(x)| > \delta\} \subseteq \{|f_n(x) - f(x)| > \tfrac{\delta}{3}\} \cup \{|f_n(x) - g(x)| > \tfrac{\delta}{3}\}$$

Это вытекает из неравенства Δ-ка
т.к. если $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\delta}{3}$, $|f_n(x) - g(x)| < \frac{\delta}{3}$, то

$$|f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| < \tfrac{2\delta}{3}$$

Следовательно, $\boxed{\mu(|f(x) - g(x)| > \delta) < \varepsilon}$ Противоречие

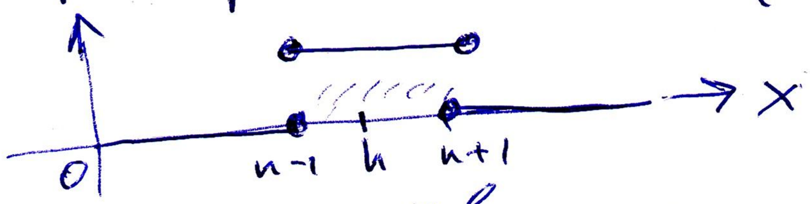
Теорема (Лебег) Пусть $\boxed{\mu(X)<\infty}$, $f_n(x)\xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$. Тогда $f_n(x)\xrightarrow{\mu} f(x)$

Доказана в лекциях.

Задача 10. Показать, что условие $\mu(X)<\infty$ является существенным. Для $X=\mathbb{R}$ построить пример $f_n(x)\xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ но $f_n(x)\not\xrightarrow{\mu} 0$.

Решение

Пример: $f_n(x)=\begin{cases}1 & |x-n|<1\\ 0 & |x-n|\geq 1\end{cases}$



Тогда $f_n(x)\xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, но $f_n(x)\not\xrightarrow{\mu} 0$, т.к. при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\mu(x: |f_n(x)|>\frac{1}{2})=2$

Сходимость по мере слабее сходимости почти всюду. Из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Контрпример был на лекции, а также в листке 2.

Тем не менее справедлива.

<u>Теорема (Рисс)</u>

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ $(n \to \infty)$

Тогда $\exists\, n_k \to \infty$, что $f_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$
$n_k \to \infty$.

<u>Доказана на лекции</u>

Условие $\mu(X) < \infty$ не требуется!)

<u>Следствие 3.</u> Предел по мере измеримых функций измерим!

<u>Решение:</u> Применить теорему Рисса и свойство предела п.в. измеримых функций.

Домашнее задание

Задача 1 Пусть $f_n(x) \geq 0$ и $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. Доказать, что найдется последовательность $A_n \to +\infty$, такая, что

$$A_n \cdot f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0.$$

(Это свойство называется устойчивостью сходимости почти всюду)

Задача 2 Пусть $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$, $x \in [0,1]$. Доказать, что существует интегрируемая функция $g(x)$, $x \in [0,1]$, и последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такие, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n \cdot g(x) \text{ почти всюду}$$