

① Сходимость по мере. (завершение)

Определение $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Доказали единственность предела по мере, а также непрерывность главного функции $f(x)$.

Теорема 1 (Левел) Пусть $\mu(X) < \infty$.

$$\text{Тогда } f_n(x) \xrightarrow{\text{н.в.}} f(x) \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x).$$

Покажем, что условие $\mu(X) < \infty$ существенно.

Сходимость по мере слабее сходимости почти всюду. Был контрпример.

Теорема 2 (Русс) Пусть $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$
 $f_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{н.в.}} f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$

Тогда $\exists n_k \rightarrow \infty$

Условие $\mu(X) < \infty$ не требуется.

Лемма 1 Пусть $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$, и пусть

$$f_n(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in X$$

$$\text{Тогда } f(x) \leq g(x)$$

Решение. 1 способ. По теореме Русса.

2 способ: Рассмотрим множества

$$A = \{x : f(x) > g(x)\}$$

$$A_k = \{x : f(x) > g(x) + \frac{1}{k}\}$$

Это increasing множества. Заметим, что $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда, если $\mu(A) > 0$,

то найдется k : $\mu(A_k) > 0$.

Из сходимости по мере заключаем,

что $\mu(f(x) > f_n(x) + \frac{1}{k}) \leq \underbrace{\mu(|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k})}_{\rightarrow 0}$

Правое неравенство стремится к нулю,

Заметим, что

$$\mu(A_k) = \mu(f(x) > g(x) + \frac{1}{k}) \leq \mu(f(x) > f_n(x) + \frac{1}{k})$$

$$т.к. f(x) > g(x) \geq f_n(x) \Rightarrow f(x) > f_n(x)$$

Следовательно, $\mu(A_k) = 0$

Противоположение. $\square$

Задача 2 Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$.

$$\text{Тогда } f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$$

Было показано в лемме 2. Не будем.

Бина аддитивная збана нбо
 упроблене: $f_n g_n \xrightarrow{m} f \cdot g$ нбо
 упроблене, нбо $\mu(X) < \infty$.

Номно ренне рбу $\varepsilon - \delta$ ренне
 нбо ренне донел одуру збну.

Збана 3. Ну нбо $\mu(X) < \infty$,
 $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$, $g_n(x) \xrightarrow{m} g(x)$.
 Ну нбо $F(y_1, y_2)$ - нубераннне ренне
 нбо $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тога $F(f_n(x), g_n(x)) \xrightarrow{m} F(f(x), g(x))$

Ренне. Бо нубераннне ренне

Ренне: $\exists n_k \rightarrow \infty$
 $f_{n_k}(x) \xrightarrow{u.b.} f(x)$, $g_{n_k}(x) \xrightarrow{u.b.} g(x)$
 Тога $F(f_{n_k}(x), g_{n_k}(x)) \xrightarrow{u.b.} F(f(x), g(x))$

В нубераннне ренне $F(y_1, y_2)$.

В нубераннне ренне ренне

Ренне, нбо бел нубераннне ренне

$F(f_n(x), g_n(x))$ нубераннне ренне $F(f, g)$

Ну нбо не так. Тога $\exists \varepsilon > 0$, нбо

$\mu(|F(f_n(x), g_n(x)) - F(f(x), g(x))| > \varepsilon) \not\rightarrow 0$.
 т.е. $\exists \varepsilon > 0 \exists n'_k \rightarrow \infty$
 $\mu(|F(f_{n'_k}(x), g_{n'_k}(x)) - F(f(x), g(x))| > \varepsilon) > \varepsilon$ (*)

Однако к это необходимо в том применении теорема Дурса,

т.е. $\{f_k''\} \subseteq \{f_k'\}$, н.б.
 $f_{k''}(x) \xrightarrow{\text{н.б.}} f(x), g_{k''}(x) \xrightarrow{\text{н.б.}} g(x)$ и

тем самым

$$F(f_{k''}(x), g_{k''}(x)) \xrightarrow{\text{н.б.}} F(f(x), g(x)).$$

Но тогда по теореме Лебега

$$F(f_{k''}(x), g_{k''}(x)) \xrightarrow{\mu} F(f(x), g(x)) \quad (**)$$

Здесь используется: $\mu(X) < \infty$!

Однако, **(**)** подразумевает **(*)**. 

Покажем, что в условиях задачи 3
 $\mu(X) < \infty$ - выполнено!

Задача 6. Показать пример последовательности $\{f_n(x)\}$ и $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, таких что $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$, но $f_n^2(x) \not\xrightarrow{\mu} f^2(x)$.

Решение:

Пусть $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$.

Тогда $f_n(x) \xrightarrow{\mu} x$ (здесь равномерно).

Однако, $f_n^2(x) - f^2(x) = (x + \frac{1}{n})^2 - x^2 =$
 $= \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 0$, т.к. $\frac{2x}{n} \xrightarrow{n} 0$
т.к. $\mu\left(\left|\frac{2x}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mu\left(|x| > \frac{n\varepsilon}{2}\right) = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

② Углерод Лебана

Дано измерение пр-ва (X, Σ, μ) .
Рассмотрим измеримую функцию
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Будем предполагать, что $\mu(X) < \infty$.
Нормируем кратко определение
интервала Римана: $X = [a, b]$.

Разбиение $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n$. $\{x_k\} = \Delta$

Строим верхнюю и нижнюю суммы
Дарбу: $S(\Delta) = \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in \Delta_k} f(x) \right) \cdot |\Delta_k|$

Верхняя

Нижняя: $s(\Delta) = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in \Delta_k} f(x) \right) \cdot |\Delta_k|$

где $|\Delta_k| = x_k - x_{k-1}$.

- 6 -

Characterization of Riemann integrability:

1. $S(\Delta) \leq S'(\Delta) \quad \forall \Delta$
2. Given a refinement Δ' of Δ , then
 $S(\Delta') \leq S(\Delta)$, $S'(\Delta) \leq S'(\Delta')$
3. $\forall \Delta_1, \Delta_2 \quad S(\Delta_1) \leq S(\Delta_2)$

Definition: $I^* = \inf_{\Delta} S(\Delta)$

$$I_* = \sup_{\Delta} s(\Delta)$$

4. $I_* \leq I^* \quad \forall f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Theorem 1: Given $I_* = I^*$, then

whenever, then $f(x)$ is Riemann integrable
 no problem, and it is integrable and
 then $I_* = I^* = I$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Definition:

Theorem: Function $f(x)$ is Riemann integrable
 no problem $\iff f(x)$ is continuous and
 $f(x)$ has only a finite number of discontinuities on $[a, b]$

Рассмотрим разбиение интервала Римана.

Пусть $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$

Мелкое разбиение $\lambda(\Delta) = \max_{k=1}^n |\Delta_k|$

Рассмотрим произвольный $\xi_k \in \Delta_k, k=1, \dots, n$

Итерационная сумма:

$$S(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta_k|$$

Определение 2: $I = \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi), \quad \forall \xi$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \Delta, \lambda(\Delta) < \delta \quad \forall \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \\ |S(\Delta, \xi) - I| < \varepsilon$$

Определение 3. Существование функции

$f(x), x \in [a, b]$, разбиение $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

тогда $f(x) = f_k$ при $x \in \Delta_k, k=1, \dots, n$

т.е. $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k \chi_{\Delta_k}(x)$

Тогда интеграл Римана существует и равен:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n f_k |\Delta_k| = \sum_{k=1}^n f_k \mu(\Delta_k)$$

Пусть $f \in C[a, b]$ - непрерывная ф-ция.
 Тогда $f(x)$ можно представить в виде
равномерно убывающей суммарной функ-
 ции. (То есть сумма из равномерно
 непрерывных функций $f \in C[a, b]$)

т.е. $\exists f_n(x)$ - функции

$$f_n(x) \xrightarrow{[a, b]} f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Тогда
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Как построить $f_n(x)$?
 Докажем использование равномерного
 разбиения: $x_k = a + \frac{b-a}{n} k, \quad k=0, 1, \dots, n$

$$f_k^u = \sup_{s \in \Delta_k} f(s) \geq f(x) \geq \inf_{s \in \Delta_k} f(s) = f_k^e \quad (\text{lower})$$

(upper) Тогда
$$f_n^u(x) = \sum_{k=1}^n f_k^u \chi_{\Delta_k}(x)$$

$$f_n^e(x) = \sum_{k=1}^n f_k^e \chi_{\Delta_k}(x)$$

А как быть, если $f(x)$ имеет разрывы?
 Например, $f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1]$

Эта функция интегрируема по Риману
 (т.к. она ограничена и имеет 1 т. разрыва)

Легко проверить, что функция $\sin \frac{1}{x}$ не может равномерно приближать непрерывные функции рассматриваемого класса.

Перейдем к определению интеграла Лебега. $f: X \rightarrow Y$

Интервал Римана строится с помощью разбиения области определения X , а интервал Лебега строится с помощью разбиения множества значений Y .

В этом их главное отличие.
Примерами: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
предполагается, что $f(x)$ — непрерывная ограниченная функция, т.е.
 $f(x) \in [A, B], \forall x \in [a, b]$.

Делим разбиение отрезка $[A, B]$
 $A = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n = B, \Delta_k = [y_{k-1}, y_k]$
 $k = 1, \dots, n$

Составим интегральные суммы Лебега (верхнюю и нижнюю)

верхняя $S(\Delta) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \mu(f^{-1}(\Delta_k))$

нижняя: $S(\Delta) = \sum_{k=1}^n y_{k-1} \cdot \mu(f^{-1}(\Delta_k))$

-10-

интерпретация суммы

$$\sigma(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n \xi_k \mu(f^{-1}(\Delta_k))$$

т.е. $\xi_k \in \Delta_k$, $k=1, \dots, n$. - модные.

Очевидные неравенства:

$$s \leq \sigma \leq S \quad \forall \Delta\text{-разбиение}$$

Введем меру разбиения:

$$\lambda(\Delta) = \max_{k=1, \dots, n} |y_k - y_{k-1}|$$

Еще одно очевидное неравенство:

$$S - s \leq \lambda(\Delta) \cdot (b-a)$$

Отметим так же, как и у суммы Дарбу при добавлении в Δ новых точек Верхняя сумма S не увеличивается, а нижняя s - не уменьшается!

Поэтому

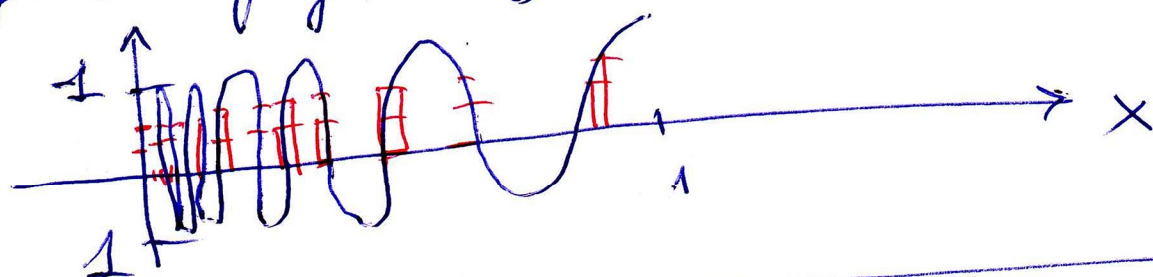
Утверждение 1: $\inf_{\Delta} S(\Delta) = \sup_{\Delta} s(\Delta) =$

$$= \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(\Delta, \xi)$$

Это и есть интеграл Лебеса!

Значит, интервал Лебега дифференцируемой функции универсальный огражденный функцией!

В чем же причина такого явления? Какое расширение класса интегрируемых функций? В том, что универсальные множества $f^{-1}(\Delta_k)$ могут быть у функции очень сложными! Рассмотрим, например, как они у функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



Утверждение 2 Любая универсально ограниченная функция является элементарно интегрируемой функцией с большим числом интервалов

Доказательство $\Delta = \{y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n\}$

Пусть $f_n(x) = y_k$ при $x \in f^{-1}(\Delta_k)$.

Тогда $|f_n(x) - f(x)| \leq \lambda(\Delta)$, где

$$\lambda(\Delta) = \max_{k=1, \dots, n} |\Delta_k| = \max_{k=1, \dots, n} |y_k - y_{k-1}|$$

Сufficientно при $\lambda(\Delta_n) \rightarrow 0$ в

$$f_n(x) \xrightarrow{[a, b]} f(x), \quad \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

где μ — мера Лебега.

③ Формальные дифференциалы

Лебега: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(X) < \infty$

$f(x)$ — непрерывная функция (не обязательно убывающая).

Определение 4. Функция $f(x)$ называется элементарной (или простой), если она принимает конечное или счетное множество значений $\{y_k\}$: $y_i \neq y_j$.

Обозначим $A_k = \{x: f(x) = y_k\}$, $k=1, 2, \dots$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Интеграл (Лебега) от элементарной функции называется:

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$$

при условии, что этот ряд абсолютно сходится, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \mu(A_k) < \infty.$$

Замечание: Если ряд сходится условно, то не ясно, как суммировать этот ряд, поскольку A_k — не обязательно попарно непересекающиеся, то не имеет смысла говорить о сходимости к различным значениям.

Определение 5. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция. Она называется интегрируемой, если существует функция $f_n(x)$, которая равномерно сходится к $f(x)$ на X . При этом интеграл f от $f(x)$ называется

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

Этот интеграл всегда существует и не зависит от равномерной сходимости последовательности функций.

-14-

Домашнее задание

Задание 1. Показать пример функции $\{f_n(x)\}$, $f(x)$, $g(x)$ — непрерывны,
 $f_n(x) \xrightarrow{M} f(x)$, но $f_n(x) \cdot g(x) \not\xrightarrow{M} f(x) \cdot g(x)$

Задание 2. Доказать, что непрерывность $\{f_n(x)\}$, $x \in [0, \pi]$
по мере никуда не сходится

Задание 3. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in [0, 1]$ интегрируема
по Лебегу и найти её интеграл

Задание 4. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [0, 1]$ не интегрируема
по Лебегу.