

Интеграл Лебега (программа)

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(X) < \infty$, f - измеримая ф-ция

Пусть $f(x)$ - элементарная ф-ция, т.е., принимает конечное число значений или имеет вид значений $\{y_k\}_{k=1, \dots, n, \dots}$; $A_k = \{x: f(x) = y_k\}$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}(x)$$

Интеграл Лебега от элементарной ф-ции:

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \quad \text{при условии,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \mu(A_k) < \infty; \quad \boxed{f(x) \in L(X)}$$

Пример интегрируемой элем. ф-ции:

$$A_k = [2^{-k+1}, 2^{-k}], \quad k=1, 2, \dots; \quad y_k = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$$

$$X = [0, 1], \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\mu(A_k) = \frac{1}{2^k}$$

ряд сходится условно, т.е. $f \notin L(X)$

Пример интегрируемой элем. ф-ции (неограниченной), $x \in [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ [\frac{1}{\sqrt{x}}], & x \neq 0 \end{cases}, \quad [y] - \text{целая часть } y$$

$$y_k = k, \quad k=1, 2, \dots, n, \dots; \quad A_k = \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2} \right]$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)^2} < \infty, \text{ т.е. } f(x) \in L(X)$$

Определение 1. $f(x)$ - измеримая по Лебегу, если $\exists \{f_n(x)\}$ - измеримая, монотонно-р-м; $f_n(x) \xrightarrow{x \in X} f(x) \ (n \rightarrow \infty)$.

Тогда (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Для того чтобы измеримая и неограниченная $f(x) \in L^1(X)$ или была $\{f_n(x)\}$:

Существование интеграла (*) обеспечивается тем, что можно и проверить:

$$\left| \int_X f_n(x) d\mu - \int_X f_m(x) d\mu \right| \leq \mu(X) \cdot \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Если $f_n \xrightarrow{x \in X} f$, $g_n \xrightarrow{x \in X} f$, то $f_n - g_n \xrightarrow{x \in X} 0$ и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu$

Лемма Лебега ($\mu(X) < \infty$)

① $\int_X 1 d\mu = \mu(X)$

-3-

② Теорема о среднем
 Если $A \leq f(x) \leq B \Rightarrow A \cdot \mu(X) \leq \int_X f(x) d\mu \leq B \cdot \mu(X)$

Лемма 1.9 Если $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f(x) d\mu \geq 0$

8) $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_X f(x) d\mu \geq \int_X g(x) d\mu$

Лемма 2.

$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow |f(x)| \in \mathcal{L}(X)$

Лемма 3. Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x), x \in X$

Если $g(x) \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{L}(X)$

Если $f(x) \notin \mathcal{L}(X) \Rightarrow g(x) \notin \mathcal{L}(X)$

③ Линейность $\forall f, g \in \mathcal{L}(X)$

$\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{L}(X) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\mu = \alpha \int_X f(x) d\mu + \beta \int_X g(x) d\mu$

Пусть $A \subset X$, A - измеримое м. б. м.

Лемма 2. $\int_A f(x) d\mu = \int_X f(x) \chi_A(x) d\mu$

Все перечисленные св-ва характеризуют

④ Если $f(x) \in R(X)$ - непрерывна
на промежутке (например $X=[a,b]$)

Тога $f(x) \in L(X)$ и $\int f(x) dx$ - ^{существование} ^{не зависит}

Пример непрерывности на дуге,

но не на промежутке, пример:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0,1], f(0) = 0$$

Рассмотрим $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] + 1, x \in (0,1]$

Тога $g(x)$ - ~~непрерывная~~ непрерывна
на промежутке (должно быть!)

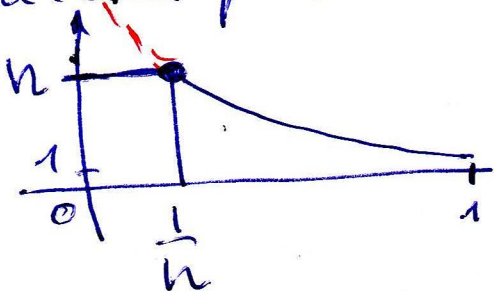
Примечание $f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) \in L(X)$

Примечание $f(x) \notin R(X)$, т.е. $f(x)$ не имеет
Ограничения, $f(x) \notin R(X)$, т.е. $f(x)$ не имеет

Пример не непрерывности на дуге:

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0,1]; f(0) = 0$$

Рассмотрим $f_n(x) = \min \left\{ n, \frac{1}{x} \right\}$



Тога $f_n(x) \in R(X)$ и

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 + \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} =$$

$$= 1 + \ln x \Big|_{1/n}^1 = 1 + \ln n \rightarrow \infty$$

Пусть $f(x) \in L^{\infty}(X)$, $f \geq 0$

$$\int_X f_n(x) dx \leq \int_X f(x) dx < \infty$$

Следовательно $f(x) \notin L(X)$.
 ↑
 $+\infty$ — нечисло.

(5) Лемма о сходимости

Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, A, A_k — измеримы
 тогда $\forall f \in L(A)$ (т.е. $\int_A f(x) d\mu < \infty$)

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(x) d\mu$$

(6) Если $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f(x) d\mu = 0$.

(7) Если $f \in L(A) \Rightarrow |f| \in L(A)$ и

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu$$

(8) Пусть $f \in L^+(X)$, $f \geq 0$ н.в. X
 тогда $\int(A) = \int_A f(x) d\mu$ — абсолютно
непрерывная мера на $X(\Sigma)$.

Задача 1. Пусть $A_{n+1} \subseteq A_n$, причем
 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_n A_n$, $f \in L(X)$, $f \geq 0$.

Доказать: $\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$.

Решение: $\int_A f(x) d\mu$ — то ч. д. м. м. м.

Таким образом, мы имеем:
 $\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$

Задача 1' (на год). Доказать, что для
любых, но Def. функций $f(x) \geq 0$.

Рассмотрим "объединение" задач.

Пусть $f \in L(A_n)$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Какая $f \in L(A)$?

Задача 2. $f \in L(A) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu < \infty$.

Решение. $f \in L(A) \Leftrightarrow |f| \in L(A)$ и тогда

$$\int_A |f(x)| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu < \infty.$$

- 7 -

Задача 3 Показано, что для функции $f(x)$ и A_n : $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu < \infty$, но $f(x) \notin L(A)$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Решение: $X = [0, 1]$, $A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$
 $f(x) = \begin{cases} n^2, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n})] \\ -n^2, & x \in (\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}), \frac{1}{n}] \end{cases}$

Тогда $\int_{A_n} f(x) dx = 0$; $\int_{A_n} |f(x)| dx = \frac{n}{n+1}$

т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \infty$.

т.е. $f(x) \notin L([0, 1])$, $f(x) \in L(A_n)$

и, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

Свойства непрерывных функций
с непрерывным непрерывным

Пусть $[a, b]$ задана $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Определение 3 Пусть $f(x)$ - не определена при $x \rightarrow a$
 и $f \in R([a+\varepsilon, b]) \quad \forall \varepsilon > 0$,
 именуется

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \stackrel{?}{=} \int_a^b f(x) dx$$

то необходимо и достаточно.

Вопрос: Пусть $f(x) \in R[a, b]$ -
 в необходимом условии. Вопрос мы,
 что $f(x) \in L([a, b])$?

Ответ: НЕТ.

Пример функции $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$
 Покажем, что она не является
 в необходимом условии:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Заменим $\frac{1}{x} = y$; $dx = -\frac{dy}{y^2}$

покажем, что она не является
 в необходимом условии

$\int_1^x f(y)g(y)dy$ сходится, так как $g(y) \downarrow 0$
 $\left| \int_1^x f(y)dy \right| \leq C$ означен $\forall x \geq 1$.

В нашем случае $f(y) = \sin y$, $g(y) = \frac{1}{y}$
 т.е. $\int_1^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy < \infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx < \infty$

Ogavako: $\int_0^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx = \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y} dy = \infty$

Этот интеграл расходится. По

непосредственной проверке $|\sin y| \geq \sin^2 y$.

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y} dy \geq \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y} dy = \int_1^{\infty} \frac{1 - \cos 2y}{2y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_1^{\infty} \frac{dy}{y} - \int_1^{\infty} \frac{\cos 2y}{y} dy \right)$$

расходится расходится не Дуфурне

аналогично $\int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y} dy$ - расходится

Поэтому $\int_0^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx = \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \notin L(0, 1)$$

Домашнее задание

Задача 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная ф-я.

Рассмотрим $f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$

$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

Доказать: $f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow f_+, f_- \in \mathcal{L}(X)$

Задача 2. Пусть $f(x) \in \mathcal{L}(X)$,
 $A_{n+1} \supseteq A_n$, тогда $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Доказать $\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$.

Задача 3. Вычислить интеграл Лебесага от функции Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q}, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$