

① Разбор задачи сам. работы №5

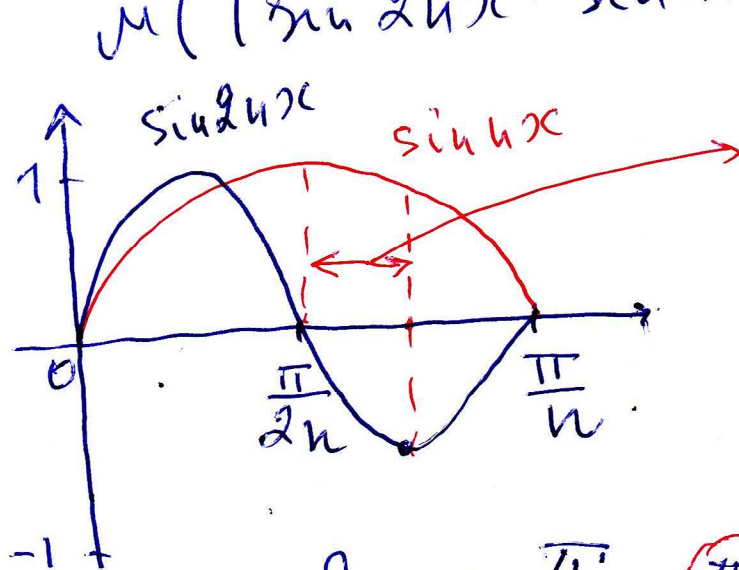
Задача 2. Доказать, что $\sin nx$ не сходится по мере ни к какому пределу, $x \in [0, \pi]$.

Решение 1. Предположим, что $\sin nx \xrightarrow{m} f(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

Тогда $\sin 2nx \xrightarrow{m} f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) (логично).

Следовательно, $\sin 2nx - \sin nx \xrightarrow{m} 0$.

Покажем, что $\exists \delta > 0$, такое, что $m(|\sin 2nx - \sin nx| > \delta) > \delta > 0 \forall n$.



Здесь $|\sin 2nx - \sin nx| > 1$
длина $\frac{\pi}{4n}$

Умножим n таких промежутков на весь отрезок $[0, \pi]$.

т.е. $\delta = n \cdot \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4}$

Следовательно, $\sin 2nx - \sin nx \not\xrightarrow{m} 0$ ($n \rightarrow \infty$).
Противоречие.

лемма 2. Пусть $\sin 4x \xrightarrow{M} f(x)$

Тогда $\cos 24x = 1 - 2\sin^2 4x \xrightarrow{M} g(x) \quad (*)$

Следовательно $\cos 44x = 2\cos^2 24x - 1$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$
$$g(x) = 2g^2(x) - 1$$

Поэтому $g(x) = 2g^2(x) - 1$ и.б. $x \in [0, \pi]$

Тогда $g(x) = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$ и.б. $x \in [0, \pi] \quad (**)$

Заметим, что $\sin 44x = 2\sin 24x \cdot \cos 24x$

Следовательно: $f(x) = 2f(x) \cdot g(x)$ и.б. x

$$\Leftrightarrow f \cdot (1 - 2g) = 0 \text{ и.б. } x$$

(**) 0 $\Rightarrow f(x) = 0$ и.б. x

Поэтому $\sin 24x \xrightarrow{M} 0$

но тогда $\cos 24x \xrightarrow{M} 1 \quad (\text{ан. } *)$

Останется заметить, что

$$\begin{aligned} \cos 2(n+1)x &= \cos(24x + 2x) = \\ &= \cos 24x \cdot \cos 2x - \sin 24x \cdot \sin 2x \end{aligned}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad 1 \quad \quad 0$

т.е. верно: $1 = \cos 2x$ и.б. $x \in [0, \pi]$
прямой вывод

Лемма 3 Восходящая теорема

Лемма: Пусть $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ и существует

функция $g(x) \geq 0$, удовлетворяющая: $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) dx$

Пусть $\sin nx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ ($n \rightarrow \infty$), тогда
по теореме Лебеса $\exists n_k \rightarrow \infty$ $\sin n_k x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

Тогда $(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 \rightarrow 0$ н.в. x
Применим теорему Лебеса. Если сходимость почти всюду и есть мажоранта: $g(x) = 4$

Тогда $\int_0^\pi (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx \rightarrow 0$ ($n_k \rightarrow \infty$)

Отсюда $\int_0^\pi (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = \int_0^\pi \sin^2 n_k x dx +$

$- 2 \int_0^\pi \sin n_k x \sin n_{k+1} x dx + \int_0^\pi \sin^2 n_{k+1} x dx =$

$= \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} = \pi$. (необходимое условие)
получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin^2 nx dx = \pi$

Поэтому информация!
 Мы знаем только: не только
 знать не хотим по себе, но и
 мы и по некоторым условиям
 не хотим по себе!

Задание 5. Пусть $\mu(X) < \infty$. Доказать
 $f(x) \in L(X, \mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(\{f(x) \geq 2^n\}) < \infty$
 $f(x) \geq 0$

Решение. Пусть $A_n = \{x \mid 2^n \leq f(x) < 2^{n+1}\}$
 $A_0 = \{x \mid f(x) < 2\}$, $n = 1, 2, \dots$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \chi_{A_n}(x) \leq f(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \chi_{A_n}(x) \quad (*)$

Заметим, что $\{f(x) \geq 2^n\} \supseteq A_n$
 $\{f(x) \geq 2^n\} \subseteq A_n \cup A_{n+1} \cup \dots$, т.е.
 $\mu(\{f(x) \geq 2^n\}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k)$

Начиная, что в сумме $(*)$
 $f(x) \in L(X, \mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(A_n) < \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum 2^n \mu(\{k : f(k) \geq 2^n\}) < \infty$,
 so für $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow f(n) \in d(x, \mu)$

Hieraus folgt, dass $f(n) \in d(x, \mu)$, so

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(A_n) < \infty.$$

Osgood

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(\{k : f(k) \geq 2^n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(\mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots) + \\
 &+ 4(\mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots) + \\
 &+ 8(\mu(A_3) + \mu(A_4) + \dots) + \\
 &+ 2^n(\mu(A_n) + \mu(A_{n+1}) + \dots) + \dots = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(A_k) + 2 \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \mu(A_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} 2^k \mu(A_k) \\
 &+ \dots + \frac{1}{2^n} \sum_{k=n}^{\infty} 2^k \mu(A_k) \leq \\
 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(A_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(A_k) + \frac{1}{2^2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(A_k) + \dots + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(A_k) =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(A_k) \right) \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(A_k) \quad \leftarrow \infty$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(f(x) \geq 2^n)$ — сходится.

② Предельный переход под интегралом

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{x} f(x)$ в каком-то смысле.
 При каких условиях верно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu ?$$

а) Пусть $f_n(x) \xrightarrow{x} f(x)$, $\mu(X) < \infty$
 Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N. \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Следовательно,

$$\left| \int_X f_n(x) d\mu - \int_X f(x) d\mu \right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon \cdot \mu(X)$$

Поэтому, предельный переход без проблем:

$$\int_X f_n(x) d\mu \rightarrow \int_X f(x) d\mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

8) $f_n(x) \xrightarrow{u.b.} f(x)$ - Верно ли?
Контрпример: $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

Тогда $f_n(x) \xrightarrow{u.b.} 0$, но $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0$

Необходимо дополнительное условие
Теорема Лебега: $|f_n(x)| \leq g(x)$ u. b.,
 где $g \in L^1(X, \mu)$. Тогда предел
 переход можно брать.

Теорема Бессе-Келли

Пусть $f_n(x) \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu < \infty$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - сходится почти всюду,
 к функции $f(x)$.

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu$$

" $\int_X f(x) d\mu$

Задание 0: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in (0, 1)$, $\alpha > 0$
при каких α $f \in \mathcal{L}(0, 1)$?

Решение $A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$

$$\int_{A_n} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^{-\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\alpha} \right], \quad \alpha \neq 1$$

$(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, Тогда, если n достаточно велико,

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) dx = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1 \\ \infty & \text{при } \alpha > 1 \end{cases}$$

при $\alpha = 1$ $\int_{A_n} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln n$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1) - \ln n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty.$$

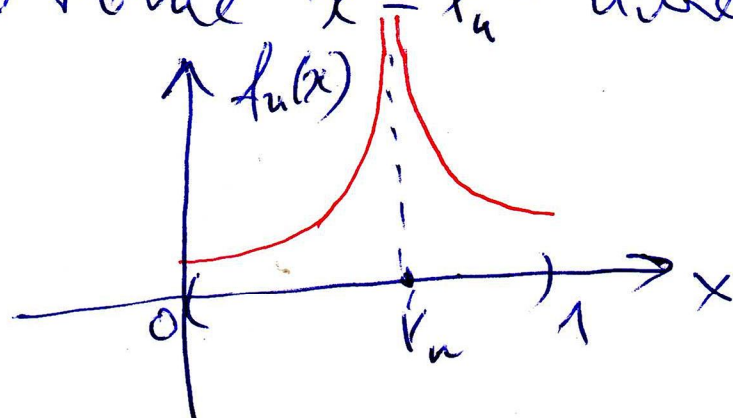
Ответ: $0 < \alpha < 1$

Пусть $\gamma_n \in (0, 1)$ - все рациональные числа на интервале $(0, 1)$.

Рассмотрим функцию: $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \gamma_n|}}$

Тогда, в каждой точке 0 , $f_n(x) \in L(0, 1)$

в точке $x = \gamma_n$ - имеет особенность
имеет вертикальную асимптоту $x = \gamma_n$



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot f_n(x)$$

Задача 1. Показать, что ряд сходится почти всюду. $U_{\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\varepsilon \cdot 2^{-n}}(\gamma_n)$

Решение. Обозначим канторовскую

γ_n окрестностью длины $\varepsilon \cdot 2^{-n}$

Тогда вне объединения U_{ε} этих интервалов
важно верно что $|x - \gamma_n| > \varepsilon \cdot 2^{-n}$, $x \notin U_{\varepsilon}$

Тогда на множестве $V_{\varepsilon} = [0, 1] \setminus U_{\varepsilon}$

было имено неравенство $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} 2^{\frac{n}{2}}$

Следовательно, при $x \in V_\varepsilon$ имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} 2^{-\frac{n}{2}}$$
 — сходится равномерно

по признаку Вейерштрасса.

Заметим, что $U_{\frac{1}{n}} \supset U_{\frac{1}{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Поэтому $V_{\frac{1}{n}} \subset V_{\frac{1}{n+1}}$.

Покажем $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\frac{1}{n}}$

Имеем $\mu(V_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \mu(V) = 1$.

при этом $\forall x \in V$ имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$
 — сходится.

Значит этот ряд сходится и.б. $x \in (0,1)$

Задача 2. $f(x) \in \mathcal{X}(0,1)$.

Решение. Воспользуемся теоремой

Белли-Леви.

Укажем на $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2^n} f_n(x) dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-x_n|}} dx = \\ &= \frac{1}{2^n} \left[\int_0^{x_n} (x_n-x)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{x_n}^1 (x-x_n)^{-\frac{1}{2}} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2^n} \left[-2 \cdot (x_n-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{x_n} + 2(x-x_n)^{\frac{1}{2}} \Big|_{x_n}^1 \right] = \\ &= \frac{1}{2^n} \left[2x_n^{\frac{1}{2}} + 2(1-x_n)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \frac{4}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Суммируя на сходящееся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{2^n} f_n(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} < \infty$$

Поэтому, по теореме Лебег-Бернштейна

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x) \in L(0,1)$$

а сам ряд сходящийся почти всюду
(это мы так же докажем в
Задаче 2 без этой теоремы)

-12-

Задача 3. Доказать, что $f^2(x) \notin L(0,1)$

Решение. Заметим, что

$$f^2(x) \geq \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{|x-x_n|} = g_n(x)$$

Правда так $g_n(x) \notin L(0,1)$
(Задача 0). Следовательно, $f^2(x) \notin L(0,1)$

Данный пример показывает, что существуют "очень плохие" непрерывные функции. Попробуем доказать, что $f(x)$ является неограниченной на любом интервале из $(0,1)$, т.к. между рациональных точек x_n всегда можно

Задача 4. (Из. гомометрии Леbesgue)

Пусть $\mu(X) < \infty$, $f_n(x)$ - непрерывна

$$f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x) \Leftrightarrow \int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu \rightarrow 0$$

Решение: Обозначим неравенства
4-й теорема. Пусть $\varphi(y)$, $y \geq 0$,

$\varphi(y) > 0$ - монотонно возрастающая ф.

Тогда $\mu(|f(x)| > c) \leq \frac{1}{\varphi(c)} \cdot \int_X \varphi(f(x)) dx$

(Мы можем взять $\varphi(y) = |y|$, $|y|^p$)

Положим рассуждения.

$$A_c = \{x \mid |f(x)| > c\}$$

$$\int_X \varphi(f(x)) dx = \int_{A_c} \varphi(f(x)) dx + \int_{X-A_c} \varphi(f(x)) dx$$

$$\geq \int_{A_c} \varphi(f(x)) dx \geq \varphi(c) \cdot \mu(A_c)$$

Следовательно:

$$\mu(A_c) \leq \frac{1}{\varphi(c)} \int_X \varphi(f(x)) dx$$

Рассмотрим функцию $\varphi(y) = \frac{y}{1+y}$.

Она монотонно возрастает, т.к.

$$\varphi(y) = \frac{y}{1+y} = \frac{1+y-1}{1+y} = 1 - \frac{1}{1+y}$$

Из неравенства

$$\mu(|f_n(x) - f(x)| > c) \leq \frac{1+c}{c} \cdot \int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1+|f_n(x) - f(x)|} dx$$

т.е., $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} dx \rightarrow 0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{M} f$

Докажем л. с помощью свойства

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{M} f(x)$

Обозначим $A_n(h) = \{ |f_n(x) - f(x)| > h \}$

Тогда $\forall h > 0 \quad \mu(A_n(h)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

$$\int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1+|f_n(x) - f(x)|} dx = \int_{A_n(h)} + \int_{X \setminus A_n(h)}$$

$$\int_{A_n(h)} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1+|f_n(x) - f(x)|} dx \leq \mu(A_n(h)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

т.к. $\varphi(y) \leq 1$

$$\int_{X \setminus A_n(h)} \frac{|f_n(x) - f(x)|^{-15}}{1 + |f_n(x) - f(x)|} dx \leq h \cdot \mu(X \setminus A_n(h))$$

$$\leq h \cdot \mu(X).$$

Lemma: $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein h : $h \cdot \mu(X) < \frac{\varepsilon}{2}$

Az gibt ein N hinreichend groß: $\forall n \geq N$
 $\mu(A_n(h)) < \frac{\varepsilon}{2}$

Dann

$$\int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\forall n \geq N, \quad \tau \cdot \varepsilon$

$$\int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} dx \rightarrow 0.$$
