

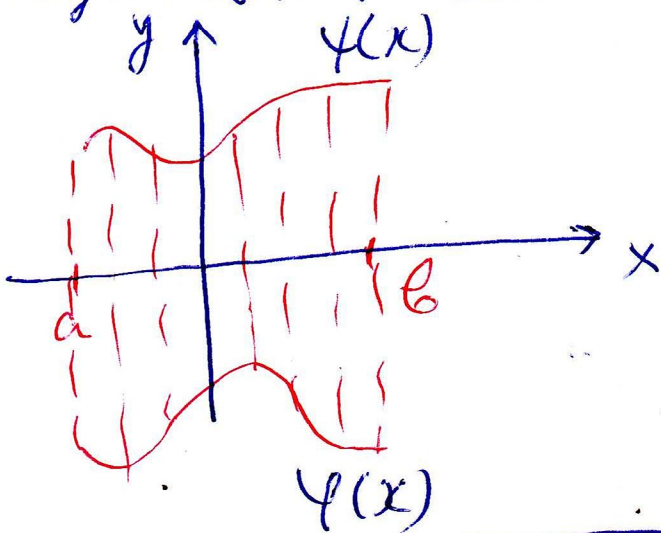
Повторные и кратные интегралы

Будем рассматривать функции, непрерывные на компактах в $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) гладкие или кусочногладкие функции. Для таких функций в таких областях интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана

① В $\mathbb{R}^2$ множество X вида

$$X = \{ (x, y), a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

называется элементарным отн. осм ОУ



$$\exists \varphi, \psi \in C[a, b] \\ \varphi(x) \leq \psi(x)$$

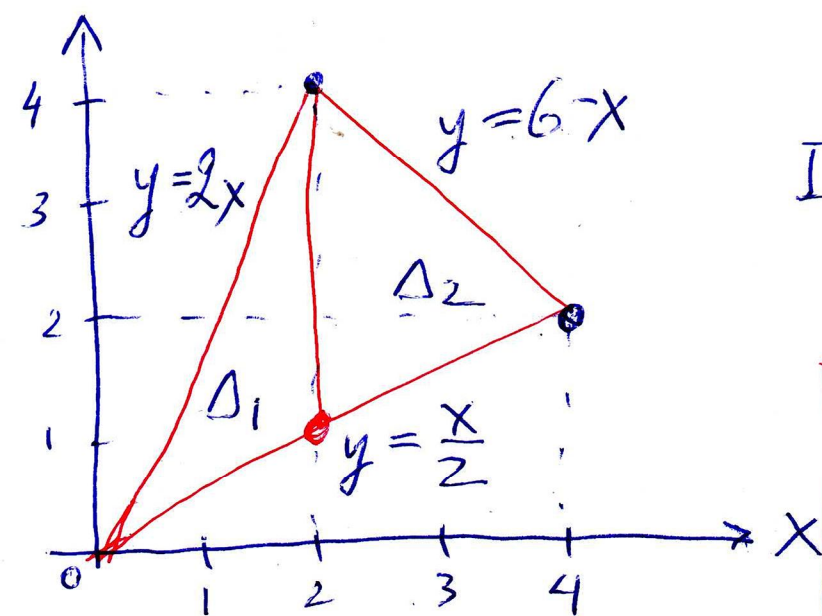
Аналогично определяется отн. осм ОХ

Теорема 1 Если $f(x, y) \in C(X)$ и
мн-во X — элементарное отн. осм ОУ
то $I = \int \int_X f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$
где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции от x .

-2-

Пример 1. Если $f(x, y) = 4$, то
 I - это площадь мн-ва X.

Задача 1. Вычислить $I = \iint_X f(x, y) dx dy$
 где $f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$, X-тр-к Δ $\begin{cases} x=2y \\ y=2x \\ x+y=6 \end{cases}$
Решение:



$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$$

$$I = \iint_{\Delta_1} f + \iint_{\Delta_2} f$$

$$\iint_{\Delta_1} f = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= \int_0^2 dx \left(-\frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_{\frac{x}{2}}^{2x} = \int_0^2 \left(-\frac{1}{1+3x} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{3}+x\right) + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{2}{3}+x\right) \right] \Big|_0^2 = -\frac{1}{3} \ln 7 + \frac{2}{3} \ln 4$$

$$\iint_{\Delta_2} f = \int_2^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{6-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \int_2^4 dx \left(-\frac{1}{1+x+y} \Big|_{\frac{x}{2}}^{6-x} \right) =$$

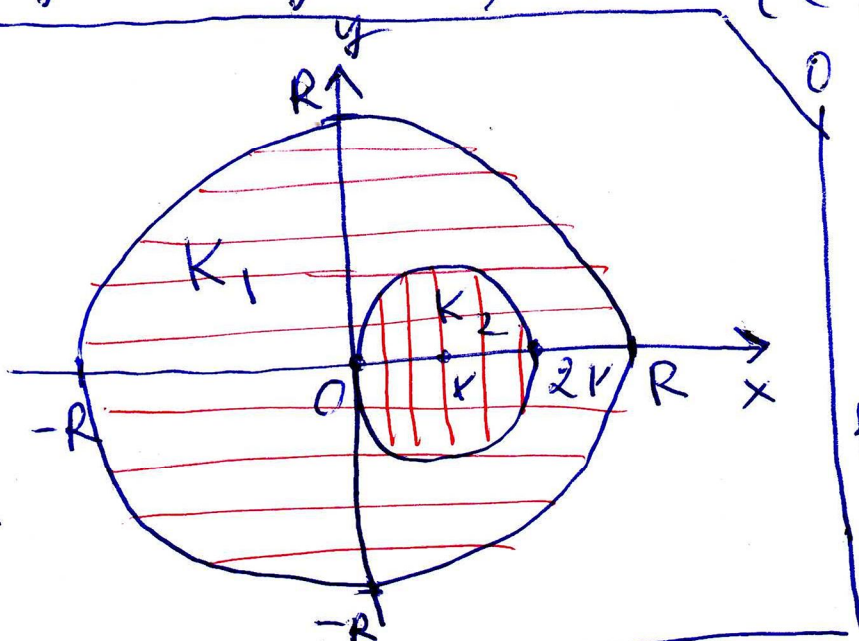
$$= \int_2^4 dx \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{1 + \frac{3x}{2}} \right) = -\frac{2}{7} + \frac{2}{3} (\ln 7 - \ln 4)$$

On bern: $I = \frac{1}{3} \ln 7 - \frac{2}{7}$

Beispiel 2 Binnennulle

$$\iint_X f(x, y) dx dy$$

Wie $f(x, y) = x$, $X = \{(x, y) : 2rx \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$



$$0 \leq 2r \leq R$$

$$X = K_1 \setminus K_2$$

$$K_1 = \begin{cases} -R \leq y \leq R \\ -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2} \end{cases}$$

$$K_2 = \begin{cases} -r \leq y \leq r \\ r - \sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq r + \sqrt{r^2 - y^2} \end{cases}$$

$$I = \iint_{K_1} f - \iint_{K_2} f$$

$$\iint_{K_1} f = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} x dx dy = \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} x dx = 0$$

φ-ue x
H-erwart
na annu
un-be

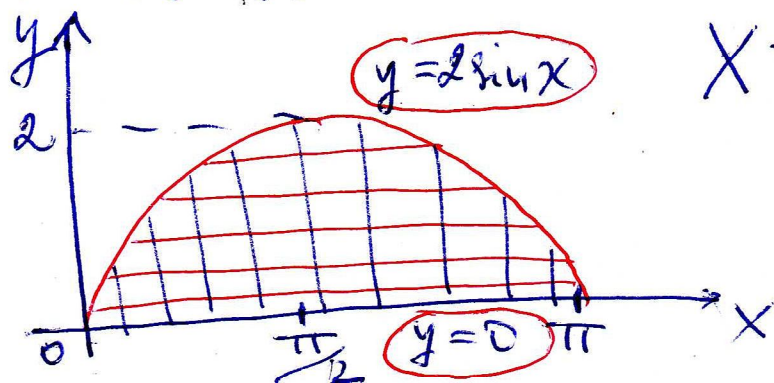
$$\begin{aligned}
 \iint_{K_2} x dx dy &= \int_{-r}^r dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{r+\sqrt{r^2-y^2}} x dx = \int_{-r}^r dy \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{r+\sqrt{r^2-y^2}} \right) = \\
 &= \int_{-r}^r dy \cdot \frac{1}{2} \left((r+\sqrt{r^2-y^2})^2 - (r-\sqrt{r^2-y^2})^2 \right) = \\
 &= \int_{-r}^r dy \cdot \frac{1}{2} \left(\cancel{r^2} + \cancel{r^2-y^2} + 2r\sqrt{r^2-y^2} - \cancel{r^2} - (\cancel{r^2-y^2}) + 2r\sqrt{r^2-y^2} \right) = \\
 &= 2r \int_{-r}^r \sqrt{r^2-y^2} dy = 2r \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^3 \quad \left(\text{площадь } \frac{1}{2} \text{ круга} \right)
 \end{aligned}$$

Ответ: $I = -\pi r^3$

Задача 3 Поместить координаты центра
 вращения в координаты центра:

$$I = \int_0^\pi dx \int_0^{2\sin x} f(x, y) dy$$

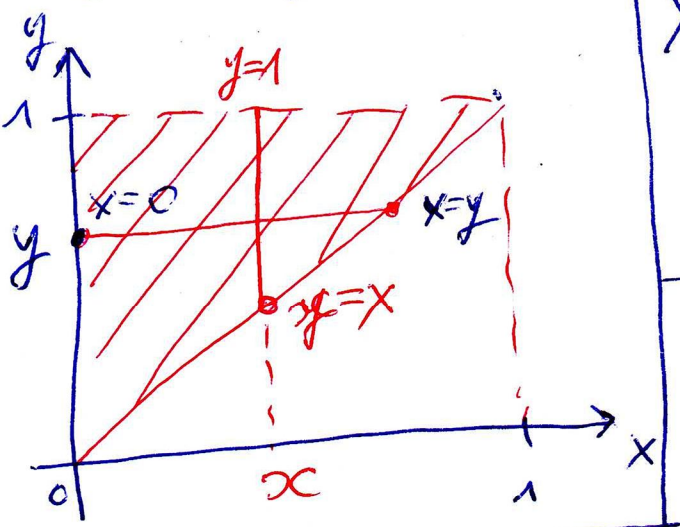
$$X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\sin x\}$$



$$\begin{aligned}
 X &= \{0 \leq y \leq 2, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\} \\
 \alpha(y) &= \arcsin \frac{y}{2} \\
 \beta(y) &= \pi - \arcsin \frac{y}{2}
 \end{aligned}$$

Омбена $I = \int_0^2 dy \int_{\arcsin(\frac{y}{2})}^{\pi - \arcsin(\frac{y}{2})} f(x, y) dx$

Задача 4 Барууагч хоёурын
хүснэгт, хоёурын хоёрдугаар хэсэгт
 $\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt[4]{1-y^2} dy$ (Эвэл эхлээд
хүснэгт!) $X = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$



$$X = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

$$= \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt[4]{1-y^2} dy =$$

$$= \int_X f = \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt[4]{1-y^2} dx = \int_0^1 dy \left(x \sqrt[4]{1-y^2} \Big|_0^y \right) =$$

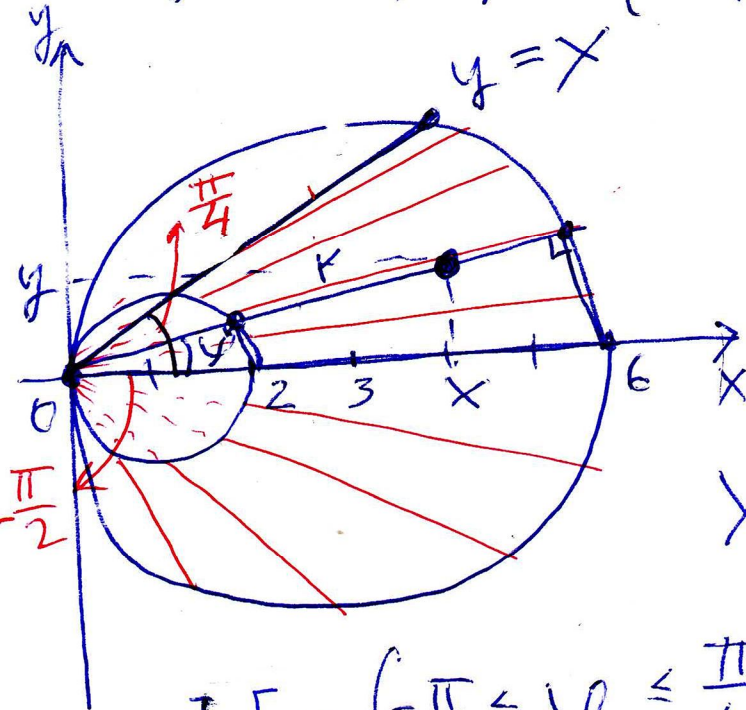
$$= \int_0^1 y \sqrt[4]{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt[4]{1-y^2} dy^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt[4]{1-z} dz =$$

$$= \frac{2}{5} \left(-(1-z)^{\frac{5}{4}} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{5}$$

Омбена: $I = \frac{2}{5}$

Задача 5. Вычислить $\int \int_X f(x, y) dx dy$

$f(x, y) = x$, $X = \{ 2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq x \}$



Перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$X \rightarrow U$$

$$U = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 2 \cos \varphi \leq r \leq 6 \cos \varphi \right\}$$

Формула замены переменных в полярных координатах:

$$\int \int_X f(x, y) dx dy = \int \int_U f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) |J(r, \varphi)| d\varphi dr$$

$$dx dy = |J(r, \varphi)| d\varphi dr, \text{ Якобиан }$$

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \int \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi =$$

$\iint_X x dx dy$ V
 По координатам границы зона 6 cos φ
 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} (\underbrace{\cos \varphi \cdot r}_x) r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} r^2 dr =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi \left(\frac{r^3}{3} \Big|_{2 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} \right) =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \varphi \cdot \left(\frac{6^3 - 2^3}{3} \right) d\varphi = \frac{208}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{13}{6} (9\pi + 8)$$

② Формула замены координат
в двойном интеграле
(одной области)

$$X \subset \mathbb{R}^2, \quad \Phi: U \rightarrow X$$

$\Phi \in C^1(U)$, Φ — гомеоморфизм.

$$(u, v) \rightarrow (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} : \begin{matrix} (u, v) \\ \uparrow \\ U \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ \uparrow \\ X \end{matrix}$$

Тога:

$$\int\int_X f(x, y) dx dy = \int\int_U f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

$$\text{где } J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

В случае полярных координат.

$$u = \varphi, v = r, \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

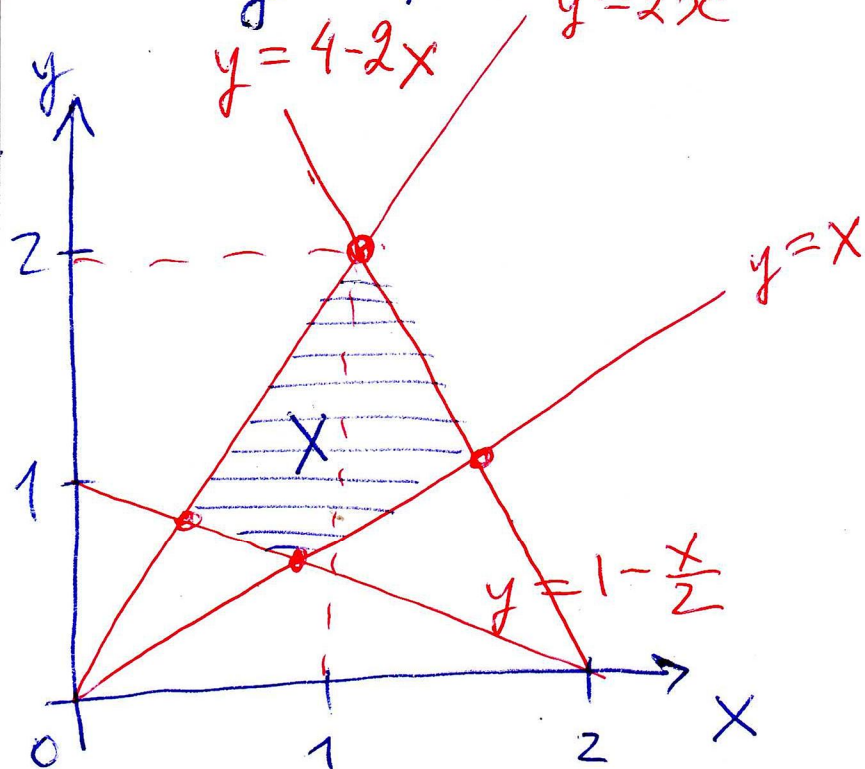
$$\underline{J(\varphi, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r$$

Задача 6. Вычисление

$$\iint f(x,y) dx dy$$

$f = \frac{1}{y}$; X - ортогональный

$$\begin{cases} y = x^{(1)}, y = 2x^{(2)} \\ y = 1 - \frac{x}{2}^{(3)}, y = 4 - 2x^{(4)} \end{cases}$$

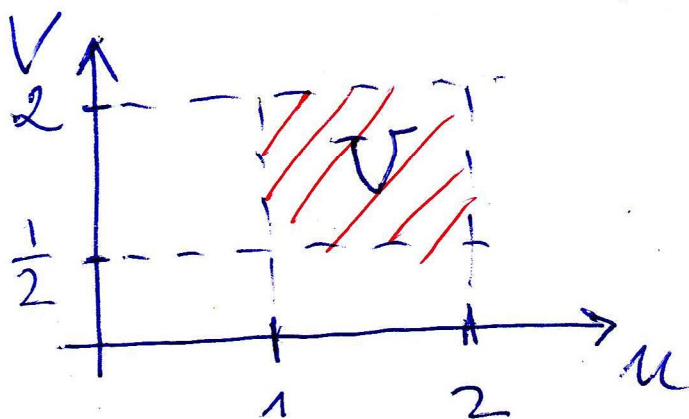


$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 1 & (1) \\ \frac{y}{x} = 2 & (2) \\ \frac{y}{2-x} = \frac{1}{2} & (3) \\ \frac{y}{2x} = 2 & (4) \end{cases}$$

Заведём переменные

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = \frac{y}{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2v}{u+v} \\ y = \frac{2u \cdot v}{u+v} \end{cases}$$

$$U = \{ 1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2 \}$$



Вычислим якобиан преобразования:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{2v}{(u+v)^2} & \frac{2u}{(u+v)^2} \\ \frac{2v^2}{(u^2+v)^2} & \frac{2u^2}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = -\left(\frac{4v \cdot u^2}{(u+v)^4} + \frac{4uv^2}{(u^2+v)^4} \right) =$$

$$= -\frac{4u \cdot v}{(u+v)^3}, \quad |J| = \frac{4u \cdot v}{(u+v)^3}$$

$$I = \int \int \frac{dx dy}{y} = \int \int \frac{u+v}{2u \cdot v} \cdot \frac{4u \cdot v}{(u+v)^3} du \cdot dv =$$

$$= 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \cdot \int_1^2 \frac{du}{(u+v)^2} = 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \cdot \left(-\frac{1}{u+v} \Big|_1^2 \right) =$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{1+v} - \frac{1}{2+v} \right) dv = 2 \cdot \ln \frac{1+v}{2+v} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 =$$

$$= 2 \left(\ln \frac{3}{4} - \ln \frac{3}{5} \right) = 2 \ln \frac{5}{4}$$

Домашнее задание

Задача 1. Вычислить интегралы

а) $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} xy dy$; б) $\iint_{|x|+|y| \leq 1} x^3 y^5 dx dy$

Задача 2. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y) dy$; б) $\int_0^6 dx \int_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x,y) dy$.

Задача 3. Вычислить интеграл, сделав
удобную замену координат

а) $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \cos(x^2+y^2) dx dy$, $a > 0$;

б) $\iint_D (x^2+4)y^2 dx dy$, где $D = \{(x,y): \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}, x \leq y \leq 3x\}$

Задача 4. Вычислить $\iint_X f(x,y) dx dy$,

где $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$; $X = \{0 < x < 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$

Задача 5. Выписать и нарисовать области, ограниченные следующими кривыми:

а) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$, $a > 0$;

б)
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, & a, b > 0. \\ y \geq 0 \end{cases}$$