Анализ 2-2 2021. Самостоятельная работа № 5.

Задача 1. Задана последовательность измеримых функций $f_n(x),\ x \in [0,1]$. Пусть $f_n(x) \to +\infty$ почти всюду на $[0,1]$. Сформулировать и доказать аналог теоремы Егорова для этого случая. (Разрешается пользоваться теоремой Егорова из лекций).

Задача 2. Доказать, что последовательность функций $\sin(nx),\ x \in [0,\pi]$ не сходится по мере на $[0,\pi]$ ни к какой функции.

Задача 3. Пусть $f(x)$ – измеримая функция в пространстве (X,Σ,μ). Обозначим

$$f_+(x) = (|f(x)| + f(x))/2, \quad f_-(x) = (|f(x)| - f(x))/2.$$

Доказать, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу, тогда и только тогда, когда функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ интегрируемы по Лебегу.

Задача 4. Вычислить интеграл Лебега по отрезку $[0,\pi]$ от функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ \cos x, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Задача 5. Пусть $\mu(X) < \infty$. Доказать, что неотрицательная измеримая функция $f(x),\ x \in X$, интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(x \in X \mid f(x) \geq 2^n).$$