

# ЛИСТОК 1. НОРМА. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

АНАЛИЗ, 2 КУРС, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР, дедлайн 20.02.2022

**1◊1** Рассмотрим в пространстве  $C[0, 1]$  две нормы:  $\|f\|_C = \max\{|f(x)|, x \in [0, 1]\}$  и  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ . Доказать, что эти нормы не эквивалентны.

Нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  называются эквивалентными, если для некоторых чисел  $a, b > 0$  выполнены неравенства  $a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1$  для для всех  $x \in L$ .

**1◊2** Теорема Вейерштрасса утверждает: множество многочленов всюду плотно в пространстве  $C[-1, 1]$ . Доказать, что в пространстве  $C[0, 1]$  всюду плотно множество всех четных многочленов (т.е., у которых равны нулю коэффициенты при нечетных степенях), а в пространстве  $C_0[0, 1] = \{f(t) \in C[0, 1], f(0) = 0\}$  всюду плотно множество всех нечетных многочленов (т.е., у которых равны нулю коэффициенты при четных степенях).

**1◊3** (\*) Рассмотрим пространство  $\ell_{loc}$ , элементами которого служат любые числовые последовательности  $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Рассмотрим в  $\ell_{loc}$  топологию покомпонентной сходимости, т.е., по определению последовательность  $x^{(n)}$  сходится к  $x$  в  $\ell_{loc}$ , если  $x_k^{(n)} \rightarrow x_k$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ . Доказать, что эта топология не является нормируемой, т.е., не существует нормы в  $\ell_{loc}$ , которая порождает эту сходимость, но является метризуемой, т.е., найдется метрика в  $\ell_{loc}$ , которая порождает эту сходимость.

**1◊4** Пусть  $(x, y)$  обозначает скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве.

**а)** Докажите, что функция  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  удовлетворяет аксиомам нормы.

**б)** Докажите, что в евклидовом пространстве равенство  $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$  выполнено тогда и только тогда, когда векторы  $x$  и  $y$  коллинеарны.

**1◊5** Доказать, что нормированное пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов  $x$  и  $y$  выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

**1◊6** Докажите, что следующие пространства не являются евклидовыми: **а)**  $\ell_p$  при  $p \in [1, 2) \cup (2, \infty]$ ; **б)**  $C[0, 1]$ . Пространство  $\ell_p$  состоит из последовательностей  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ , и норма в нем задается формулой  $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{1/p}$  при  $p < \infty$  и  $\|x\|_\infty = \sup\{|x_k|, k = 1, 2, \dots\}$  при  $p = \infty$ .

**1◊7** В пространстве  $L_2[-1, 1]$  построить ортогональное дополнение для следующих множеств

**а)**  $M = \{x \in L_2[-1, 1] : x(t) = 0 \text{ для всех } t \leq 0\}$ ;

**б)**  $M = \{x \in L_2[-1, 1] : x(t) = x(-t) \text{ для всех } t \in [-1, 1]\}$ ;

**в)**  $M = \{x \in L_2[-1, 1] : \int_{-1}^0 x(t) dt = \int_0^1 x(t) dt\}$ .

**1◊8** В пространстве  $L_2[0, 1]$  найти расстояние от вектора  $x(t) = t^n$  до подпространства  $H_0 = \{x \in L_2[0, 1] : \int_0^1 x(t) dt = 0\}$ .

**1◊9** Докажите, что система Радемахера  $r_n(t) = \text{sign} \sin(2^n \pi t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ортонормирована, но не полна в  $L_2[0, 1]$ .

**1◊10** Докажите, что в системе многочленов Чебышева I рода

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad n = 0, 1, \dots$$

**а)**  $T_n(t)$  является многочленом степени  $n$ ;

**б)** функция  $T_n(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - t^2)T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2T_n(t) = 0;$$

**в)** все функции ортогональны в пространстве  $L_2[-1, 1]$  с весом  $(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$ ;

**г)** образуют в этом пространстве ортогональный базис.

**1◊11** (\*) Докажите, что среди всех многочленов вида  $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$  наименьшую норму в вещественном пространстве  $C[-1, 1]$  имеет многочлен Чебышева I рода  $T_n(t) = 2^{1-n} \cos(n \arccos t)$ .