

Листок 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

АНАЛИЗ, 2 КУРС, дедлайн 27.03.2022

- 2◊1** Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ сходится абсолютно. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$ сходится равномерно при $x \in \mathbb{R}$ и его сумма является непрерывной периодической функцией. Чему равны коэффициенты Фурье этой функции по системе $\{\sin(nx)\}$ на $[0, \pi]$?
- 2◊2** Пусть $f \in L_2[-\pi; \pi]$ и a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) – коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе. Доказать равномерную сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx$ при $x \in \mathbb{R}$.
- 2◊3** Пусть функция $f \in L_1[0, \pi]$. Рассмотрим ее коэффициенты Фурье $\{c_n\}$ по тригонометрической системе $\{\sin(nx)\}$ или $\{1, \cos(nx)\}$.
- а) Доказать, что $c_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). (Указание: использовать лемму Римана).
 б) Обязательно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$?
 в) При каком условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$?

2◊4 Пусть $f, g \in L_1[-\pi, \pi]$. Доказать *принцип локализации*: если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in]-\pi, \pi[$, то их ряды Фурье по тригонометрической системе сходятся и расходятся в точке x_0 одновременно, а в случае сходимости их суммы совпадают. (Указание: использовать лемму Римана.)

2◊5 Зная коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π , вычислите коэффициенты Фурье $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ следующих функций:

а) “смещенной” функции $f(x+h)$, $h = \text{const}$, б) “усредненной” функции $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.

2◊6 Пусть функции $f, g \in L_2([-\pi; \pi]; \mathbb{C})$. Рассмотрим соответствующие им тригонометрические ряды Фурье в комплексной форме $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{inx}$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Докажите, что $fg \in L_1([-\pi; \pi]; \mathbb{C})$ и коэффициенты Фурье произведения fg могут быть получены при перемножении формальных рядов Фурье функций f и g . Обоснуйте полученные формулы.

2◊7 Пусть вещественная функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и имеет на нем производную f' , которая принадлежит $L_2[0, \pi]$. Пусть выполнено одно из условий:

а) $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ или б) $f(0) = f(\pi) = 0$.

Доказать неравенство:

$$\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx \leq \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx,$$

в котором равенство достигается лишь при а) $f(x) = a \cos x$, б) $f(x) = a \sin x$.

2◊8 Пусть функция $f \in C[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, причем для ее коэффициентов Фурье $\{c_n\}$ по системе $\{\sin(nx)\}$ выполнено условие $c_n = o(1/n)$. Доказать, что ряд Фурье сходится к f равномерно на $[0, \pi]$. (Указание: применить теорему Фейера.)

2◊9 Пусть комплексная 2π -периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, где c_n – коэффициенты Фурье f , и ряд Фурье сходится к f равномерно на всей оси.

2◊10 (*) Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$. а) Доказать, что суммы Фейера $\sigma_n(x)$ функции f сходятся к f по норме пространства $L_1[-\pi, \pi]$. б) Доказать, что всякая функция из пространства $L_1[-\pi, \pi]$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

2◊11 а) (*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in [0, 2\pi]$, сходится при каждом x , его сумма $f(x)$ непрерывна при $x \in]0, 2\pi[$, и $f \in L_1[0, 2\pi]$, но $f \notin L_2[0, 2\pi]$.

б) (*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$ сходится при каждом $x \in]0, 2\pi[$ к некоторой непрерывной функции $f(x)$ на этом интервале, но $f \notin L_1[0, 2\pi]$.

2◊12 (*) Решить уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = 0.$$