Листок 3. Применение рядов Фурье к задачам математической физики

Анализ, 2 курс, **дедлайн 15.05.2022**

3◇1 Решите методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \qquad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = x^2 - 1.$$

3◇2 Концы стержня $[0,1]$ поддерживаются при постоянных температурах $u|_{x=0} = a,\ u|_{x=1} = b$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = \varphi(x), \varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b$. Найти $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

3◇3 Решите методом Фурье следующую задачу для уравнения колебаний струны:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \qquad u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=\pi} = t, \qquad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

(Указание к задачам 2 и 3: подберите такое частное решение $v(x,t)$ рассматриваемого уравнения, чтобы граничные условия разности $u(x,t) - v(x,t)$ стали нулевыми, и решите для разности это уравнение с новыми начальными условиями.)

3◇4 Найдите формулу решения следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $D = \{(x,y) \in [0,a] \times [0,b]\}$ методом Фурье:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,\ u(0,y) = u(a,y) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),\ u(x,b) = \psi(x).$$

3◇5 Решите следующие задачи Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все собственные значения λ и соответствующие им собственные функции $y(x),\ x \in [0,\ell]$:
а) $-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\ell) = 0;$
б) $-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(\ell) = 0.$
в) Доказать полноту в $L_2[0,\ell]$ этих систем собственных функций.

3◇6 Доказать, что оператор Штурма–Лиувилля задачи

$$\begin{gathered} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in [0,\ell], \\ \alpha y'(0) + \beta y(0) = 0, \quad \gamma y'(\ell) + \delta y(\ell) = 0. \end{gathered}$$

где $p(x) > 0,\ q(x) \ge 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \ne 0, \gamma^2 + \delta^2 \ne 0$, является симметричным в пространстве $L_2(0,\ell)$. При каких условиях на эти константы оператор положителен?

3◇7 $(*)$ Доказать, что дифференциальный оператор

$$A := -\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx}\right]$$

является симметричным и положительным в пространстве $L_2[-1,1]$ с областью определения $D_A = \{y(x)\,|\,y(x) \in C^2[0,l]\}$ (граничные условия отсутствуют), а полиномы Лежандра $P_n(x),\ n = 0,1,\ldots,$ служат собственными функциями оператора A с собственными значениями $n(n+1)$.
(*Оператор A не порождает задачу Штурма-Лиувилля, т.к. здесь отсутствуют граничные условия, и, как можно проверить, $P_n(1) = 1,\ P_n(-1) = (-1)^n$*).

3◇8 $(*)$ Исходя из полноты ортогональной системы полиномов Лежандра в $L_2[-1,1]$, докажите, что у оператора A нет других собственных функций и собственных значений, кроме $P_n(x)$ и $n(n+1),\ n = 0,1,\ldots.$