Листок 4. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Анализ, 2 курс, **дедлайн 26.06.2022**

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Интегралом Фурье функции f в точке x называется величина

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda = \frac{1}{2\pi} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt d\lambda.$$

Преобразованием Фурье $F[f]$ от $f(x)$ называется функция $\tilde{f}(\lambda)$

$$\tilde{f}(\lambda) = F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Напомним формулу обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

которая справедлива при условии, что в точке x выполнено условие Дини.

4⋄1 **Интеграл Дирихле.** Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4⋄2 **Лемма Римана на $\mathbb{R}$.** Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iAt}\, dt = 0.$$

4⋄3 **Принцип локализации для интеграла Фурье.** Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$, то интегралы Фурье функций f и g в точке x_0 сходятся или расходятся одновременно к одному и тому же значению.

4⋄4 Найти преобразования Фурье следующих функций:

а) $f(x) = x\chi_{a,b}(x)$; **б)** $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^3 e^{-|x|})$.

4⋄5 Какой функцией будет преобразование Фурье функции $f(x)$, если известно, что функция f 1) четная, 2) нечетная, 3) вещественная, 4) удовлетворяет условию $f(x) = \overline{f(-x)}$? Аналогичный вопрос про функцию f, если этими свойствами обладает ее преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ по переменной λ.

4⋄6 Восстановить функцию $f(x)$ по ее преобразованию Фурье $F[f](\lambda)$, если

а) $F[f](\lambda) = \frac{1}{a+i\lambda}$; **б)** $F[f](\lambda) = \frac{\sin \pi\lambda}{1-\lambda}$.

4⋄7 **а)** Доказать, что функция $f(x) = e^{-x^2}$ принадлежит пространству Шварца S.
б) Принадлежит ли функция $f(x) = e^{-x^2}\cos(e^{x^2})$ пространству Шварца S?

4⋄8 **а)** Пусть F преобразование Фурье в пространстве Шварца S. Что представляет собой отображение $G = F \circ F$, т.е. $G[f] = F[F[f]]$?

б) Пусть $f_1(x), f_2(x) \in S$. Доказать, что $(F[f_1], f_2) = 2\pi(f_1, F^{-1}[f_2])$, где F^{-1} – обратное преобразование Фурье.

4⋄9 (*) Формула Пуассона. Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца. Докажите равенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} F[f](n)e^{inx}.$$

Указание: левая часть является периодической функцией. Найдите для нее коэффициенты Фурье по ортогональной системе $\{e^{inx}\}$ и убедитесь в равномерной сходимости соответствующего ряда Фурье.

4⋄10 (*) Пусть функция $u = u(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_+$ принадлежит пространству Шварца по переменной x равномерно по y (т.е., константы в оценках производных $u(x,y)$ по по переменной x не зависят от y) и является решением следующей задачи в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0 \quad \text{(уравнение Лапласа)},\\
&u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

причем $u(x,y) \to 0$ при $y \to +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.

а) Проверьте, что преобразование Фурье функции $u(x,y)$ по переменной x имеет следующий вид

$$F[u](\lambda) = F[\varphi](\lambda)e^{-y|\lambda|},\ \forall y \geqslant 0.$$

б) С помощью формулы обращения получите формулу для решения рассматриваемой задачи в виде интеграла Пуассона

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}\varphi(\xi)d\xi.$$