Математический анализ. 2 курс. 2 семестр.

Программа экзамена 2022 г. за 4 модуль

1. Доказать изопериметрическое неравенство. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности (без обоснования сходимости).

2. Доказать сходимости ряда, представляющего решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности, которое получается по методу Фурье. Доказать теорему о существовании решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о единственности решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Записать формулу для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности с помощью функции Грина этой задачи и обосновать ее.

3. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения упругих колебаний струны. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать и доказать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи неоднородного уравнения упругих колебаний струны с правой частью (без доказательства) и вывести формулу для решения.

4. Сформулировать общую задачу Штурма–Лиувилля. Доказать основные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля: симметричность и положительность оператора, ортогональность собственных функций, однократность собственных значений. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля (без доказательства).

5. Вывести формулу Фурье для функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ формально из ряда Фурье этой функции (без обоснования сходимости). Доказать теорему о сходимости интеграла Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при выполнении условия Дини. Записать интеграл Фурье в комплексной форме и дать определение преобразования Фурье. Доказать однозначность (инъективность) преобразования Фурье для функции из $L_1(\mathbb{R})$. Найти преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

6. Доказать равномерную сходимость последовательности $\{F[f_n]\}$ преобразования Фурье, если известно, что $\{f_n\}$ сходится в норме $L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ является ограниченной непрерывной функцией, причем $F[f](\lambda) \to 0$ $(|\lambda| \to \infty)$. Вывести формулу для преобразования Фурье производной $f'(x)$ при условии, что $f,\ f' \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $f(x)$. Связь порядка гладкости функции со степенью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье. Вывести формулу производной преобразования Фурье $F[f](\lambda)$ при условии, что $f(x),\ xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $F[f](\lambda)$. Связь порядка гладкости функции $F[f](\lambda)$ со степенью убывания на бесконечности функции $f(x)$.

7. Дать определение пространства Шварца S. Привести примеры функций из пространства Шварца. Доказать, что операторы дифференцирования и умножения на полином переводят пространство Шварца в себя. Доказать, что преобразование Фурье

переводит пространство Шварца в себя. Формула обратного преобразования Фурье в пространстве Шварца. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца. Дать определение преобразования Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Сформулировать теорему об обращении преобразования Фурье при выполнении условия Дини в $\mathbb{R}^n$. Дать определение пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^n)$.

8. Получить формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ методом разделения переменных (без строго обоснования). Вывести формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ в пространстве Шварца с помощью преобразования Фурье. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ с начальным условием из пространства Шварца. Доказать основные свойства ядра Пуассона $G(x, y, t)$: положительность, бесконечную дифференцируемость по всем аргументам при $t > 0$, выполнение уравнения теплопроводности для $G(x, y, t)$ при $t > 0$, и равенство $\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)dx = 1$. Доказать, что формула Пуассона, где φ – непрерывная и ограниченная функция, задает бесконечно дифференцируемую функцию $u(x, t)$ при $t > 0$, которая является решением уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$. Доказать, что формула Пуассона, в которой φ – непрерывная и ограниченная функция, задает непрерывную функцию $u(x, t)$ при $t \geq 0$, которая удовлетворяет начальному условию $\varphi(x)$.

9. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ с начальным условием из пространства Шварца. Вывести формулу для решения уравнения упругих колебаний бесконечной струны в пространстве Шварца S с помощью преобразования Фурье. Сформулировать теорему Даламбера о представлении произвольного решения уравнения колебаний струны класса C^2 в виде суммы двух бегущих волн. Вывести формулу Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны.

10. Дать определение пространства основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ и привести примеры. Топология сходимости в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$. Дать определение пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$ и привести примеры. Регулярные и нерегулярные обобщенные функции. Топология сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Дельта-образные последовательности. Действия и операции с обобщенными функциями: сложение и умножение на числа, умножение на бесконечно дифференцируемые функции. Линейная замена аргумента обобщенной функции. Лемма о производной гладкой функции. Определение производных обобщенных функций. Примеры вычисления производных обобщенных функций. Свойства производных обобщенных функций. Формула Лейбница. Общий вид обобщенных функций на прямой, имеющих нулевую производную. Решение линейных обыкновенных уравнений в классе обобщенных функций.

Порядок проведения экзамена за 4 модуль.

Экзамен проводится в устной форме. Все студенты получат по билету, в котором будет два вопроса из приведенного выше списка и одна задача из списка, выложенного на странице курса. На подготовку дается 30 минут. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. Правильный ответ на каждый вопрос и правильно решенная задача оцениваются в 3 балла. Если студент отвечает на все вопросы и решает задачу, то он получает оценку 10. В противном случае преподаватель может задать дополнительный вопрос, ответ на который может как повысить, так и понизить набранную за билет сумму баллов, которая формирует оценку.

Список задач будет опубликован на странице курса.