Математический анализ. 2 курс. 2 семестр. 2022 г.

Задачи для коллоквиума за 3 модуль.

1. Является ли множество $X_0 = \{x \in X \mid x(0) = x(1)\}$ замкнутым в пространстве
   а) $X = C[0,1]$ с нормой max; б) $X = C_2[0,1]$ с нормой $L_2(0,1)$?

2. Вывести из неравенства Коши-Буняковского неравенство треугольника для нормы в евклидовом пространстве.

3. Привести пример бесконечномерного полного евклидова пространства.

4. Привести пример неполного евклидова пространства.

5. Привести пример нормированного пространства, которое не является евклидовым.

6. Доказать, что в евклидовом пространстве векторы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора).

7. Пусть M – произвольное множество в гильбертовом пространстве H.
   Доказать, что $M^\perp := \{x \in H \ : \ (x,y) = 0, \ \forall y \in M\}$ является (замкнутым) линейным подпространством H.

8. В евклидовом пространстве $L_2[0,1]$ найти угол между векторами $x(t) = 1$ и $y(t) = t$.

9. В евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$ найти углы треугольника с вершинами в точках $x(t) = 0, \ y(t) = 1$ и $z(t) = t$.

10. Пусть векторы $\{e_1, e_2, e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$ образуют правильный тетраэдра со стороной 1, т.е., их длины равны 1, а углы между ними равны $\pi/3$. Проделать ортогонализацию для этой системы.

11. Пусть $\{x_n\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в H если, и только если, числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ сходится.

12. Примените процесс ортогонализации к системе $\{1, t, t^2\}$ в пространстве $L_2[0,1]$.

13. В пространстве $L_2[-1,1]$ построить ортогональное дополнение для множества $M = \{x \in L_2[-1,1] : \ \int_{-1}^{1} x(t)dt = 0\}$.

14. Найти расстояние в $L_2(0,\pi)$ от вектора $x(t) = \sin t$ до подпространства $H_0 = \left\{x \in L_2(0,\pi) \mid \int_0^\pi t x(t)dt = 0\right\}$.

15. Пусть M – линейное подпространство гильбертова пространства H. Доказать, что $(M^\perp)^\perp = M$.

16. Доказать, что для произвольного множества X в гильбертовом пространстве выполнено следующее включение: $X \subseteq (X^\perp)^\perp$. Возможно ли здесь строгое включение?

17. Ортогонализуйте следующую систему функций в $L_2[0,\pi]$:
$$\cos\frac{x}{2}, \ \sin\frac{x}{2}\sin x, \ \ldots, \ \sin\frac{x}{2}\sin nx \ \ldots$$

18. Доказать, что система $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n+1/2)t}, \ n \in \mathbb{Z}\right\}$ является ортонормированной в $L_2[-\pi,\pi]$.

19. Доказать, что система $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(n+1/2)t},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ является полной в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.

20. Доказать, что система функций $\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x,\ n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна $L_2[0,\pi]$.

21. Доказать, что система функций $\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x,\ n \in \mathbb{N}\}$ полна в $L_2[0,\pi]$.

22. Привести пример незамкнутого линейного многообразия в гильбертовом пространстве ℓ_2.

23. Привести пример функции, из $L_1[0,1]$, которая не принадлежит $L_2[0,1]$.

24. Привести пример функции, из $L_2(\mathbb{R})$, которая не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

25. Привести пример функциональной последовательности, которая сходится к 0 в $L_2(\mathbb{R})$, но которая не имеет предела в $L_1(\mathbb{R})$.

26. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в пространстве $L_2[0,1]$ к функции $f(x)$, то $f^2(x) \in L_1[0,1]$, и $\{f_n^2(x)\}$ сходится к $f^2(x)$ в пространстве $L_1[0,1]$.

27. Привести пример последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[0,1]$, которая сходится по мере, но не сходится в $L_1[0,1]$.

28. Привести пример последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[0,1]$, которая сходится по мере, но не сходится ни в какой точке $x \in [0,1]$.

29. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x), x \in [0,1]\}$ сходится в среднеквадратичном, то из нее можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

30. Привести пример последовательности функций $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[0,1]$, которая сходится к 0 всюду на этом отрезке, но никакая ее подпоследовательность не сходится в среднем.

31. Привести пример последовательности функций $\{f_n(x), x \in \mathbb{R}\}$, которая сходится к 0 равномерно, но не сходится ни в среднем, ни в среднеквадратичном.

32. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ тригонометрическим рядом Фурье какой-то функции из $L_2(-\pi,\pi)$?

33. Функцию $f(x) = x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0,\pi]$ по ортогональной системе $\{\sin kx,\ k \in \mathbb{N}\}$ и записать для нее равенство Парсеваля.

34. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ по тригонометрической системе.

35. Функцию $f(x) = \cos^3 x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0,\pi]$ по ортогональной системе $\{\cos kx,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$.

36. Функцию $f(x) = \cos x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0,\pi]$ по ортогональной системе $\{\sin kx,\ k \in \mathbb{N}\}$.

37. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sign} x,\ x \in [-\pi,\pi]$, и объяснить, к чему сходится этот ряд в каждой точке x.

38. Пусть $\{c_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_2[0,\pi]$ по тригонометрической системе $\{\sin(nx)\}$. Обязательно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$?

39. Пусть функция $f(x) \in L_1[-\pi,\pi]$ удовлетворяет в точке $x_0 \in [-\pi,\pi]$ локальному условию Липшица, т.е. существуют такие числа $\delta > 0$ и $L > 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|,\ \forall x, y \in \mathcal{O}_\delta(x_0).$$

Доказать, что ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе сходится в точке x_0.

40. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ рядом Фурье непрерывной функции?

41. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{7/3}}$ рядом Фурье непрерывно диффернецируемой функции?

42. Пусть $f \in C[0, \pi]$ и c_n – коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе $\{\sin nx,\ n \in \mathbb{N}\}$. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \cos nx$. Чем является сумма $F(x)$ этого ряда для функции $f(x)$?