Математический анализ. 2 курс. 2 семестр.

Задачи для экзамена 2022 г. за 4 модуль

1. Решить методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin x \cos x.$$

2. Решить методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin^3 x.$$

3. Решить методом Фурье следующую задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin^3 x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

4. Решить методом Фурье следующую задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x \cos x.$$

5. Решить следующую задачу Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все функции $y(x)$ и значения λ, удовлетворяющие условиям:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(l) = 0.$$

6. Решить следующую задачу Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все функции $y(x)$ и значения λ, удовлетворяющие условиям:

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(\pi) = 0.$$

7. Докажите, что $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. (Указание: воспользоваться тождество $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$).

8. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Докажите лемму Римана в $\mathbb{R}$:

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin At \, dt = 0.$$

9. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет в точке 0 локальному условию Липшица, т.е. существуют такие числа $\delta > 0$ и $L > 0$, что

$$|f(0) - f(x)| \le L|x|, \ \forall x, |x| < \delta.$$

Пусть $g(\lambda)$ – преобразование Фурье от f. Доказать, что $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda$.

10. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \ \alpha > 0$.

11. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \{1 \text{ при } |x| \le a; \ f(x) = 0 \text{ при } |x| > a.\}$

12. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.

13. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 e^{-|x|})$.

14. Восстановить функцию $f(x)$ по ее преобразованию Фурье $F[f](\lambda) = \frac{\sin a\lambda}{\lambda} \quad (a \neq 0)$.

15. Восстановить функцию $f(x)$ по ее преобразованию Фурье $F[f](\lambda) = \frac{1}{\lambda^2+\alpha^2}$.

16. Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Верно ли, что преобразование Фурье $F[f](\lambda) \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$?

17. Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, причем $f'(x)$, $f''(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье $F[f](\lambda) \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$.

18. Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$. Верно ли, что преобразование Фурье $F[f](\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}_\lambda)$?

19. Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ является финитной функцией, т.е. $f(x) = 0$ при почти всех $|x| > a$ для некоторого $a > 0$. Доказать, что преобразование Фурье $F[f](\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}_\lambda)$.

20. Доказать, что функция $f(x) = \exp(-x^2)$ принадлежит пространству Шварца S.

21. Принадлежит ли функция $f(x) = e^{-x^2}\cos(e^{x^2})$ пространству Шварца S?

22. Пусть F преобразование Фурье в пространстве Шварца S. Что представляет собой отображение $G = F \circ F$, т.е. $G[f] = F[F[f]]$?

23. Пусть $f(x) \in S$. Рассмотрим первообразную $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$. Доказать, что функция $F(x) \in S$ если и только если $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 0$.

24. Пусть $f(x) \in S$. Доказать, что функция $\frac{f(x)}{x} \in S$ если и только если $f(0) = 0$.

25. Пусть $f(x) \in S$. Доказать, что $\frac{F[f](\lambda)}{\lambda} \in S_\lambda$ если и только если $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$.

26. Пусть $f(x) \in S$. Доказать, что функция $\frac{f(x)-f(-x)}{x} \in S$.

27. Что можно сказать про преобразование Фурье функции f, если известно, что функция f 1) четная, 2) нечетная?

28. Что можно сказать про преобразование Фурье функции f, если известно, что функция f 1) вещественная, 2) удовлетворяет условию $f(x) = \overline{f(-x)}$?

29. Рассмотрим преобразование Фурье как отображение $f(x) \mapsto F[f](\lambda)$. Проверьте соответствие (здесь три задачи)

    а) $f(ax) \mapsto \frac{1}{|a|}F[f]\left(\frac{\lambda}{a}\right)$;

    б) $f(x+x_0) \mapsto e^{ix_0\lambda}F[f](\lambda)$;

    г) $f(x)e^{\pm i\lambda_0 x} \mapsto F[f](\lambda \mp \lambda_0)$.

30. Доказать, что ядро Пуассона $G(x,y,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$ удовлетворяет тождеству $\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)dx = 1$ при $t > 0$.

31. Доказать, что ядро Пуассона $G(x,y,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t = a^2u_{xx}$ в верхней полуплоскости $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0\}$.

32. Решить в пространстве Шварца S с помощью преобразования Фурье задачу Коши:

    а) $u_t = au_x, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in S.$

    б) $u_t = tu_x, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in S.$

    в) $u_t = 3u_x + 2tu_y, \quad u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^2).$

33. Решите задачу Коши для уравнения колебаний бесконечной струны, применяя формулу Даламбера:

$$\textbf{а)}\quad u''_t = 4u''_{xx}, \qquad u(0,x) = \cos x, \quad u'_t(0,x) = \sin 2x.$$

$$\textbf{б)}\quad u''_t = u''_{xx}, \qquad u(0,x) = e^{-x^2}, \quad u'_t(0,x) = \frac{1}{1+x^2}.$$